

College

NIET-LINEAIRE TRILLINGEN

door

Prof.dr. H.A. Lauwerier

1960-'61

§ 1. Inleiding *)

Het wiskundig onderzoek van niet-lineaire verschijnselen is nog maar van betrekkelijk recente aard. Er is geen algemene behandeling mogelijk van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. Zelfs voor de beperkte groep van gewone differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

$$(1.1) \quad \ddot{x} + F(x, \dot{x}) = G(t)$$

waartoe we ons in dit college zullen beperken zijn er nauwelijks algemene regels aan te geven. Het komt er min of meer op neer dat elke vergelijking van dit type weer een eigen aparte behandeling vereist. De door (1.1) bepaalde beweging kunnen we opvatten als die van een slinger met terugdrijvende kracht F en uitwendige kracht G . Vaak splitst men F nog in een wrijvingskracht en een van een potentiaal afleidbare veerkracht. In dit college beschouwen we i.h.b. twee beroemde speciale gevallen van (1.1) te weten de vergelijking van Van der Pol (1920) welke in § 6 behandeld zal worden en de vergelijking van Duffing (1918) welke in § 7 beschouwd zal worden.

Het blijkt dat de door (1.1) beschreven niet-lineaire trillingen van geheel andere aard kunnen zijn dan de door een lineaire vergelijking bepaalde harmonische trillingen. In het bijzonder wijzen we hier op het verschijnsel van zelf-excitatie bij afwezigheid van een uitwendige kracht. Dit betekent dat een willekeurig kleine aanvangsbeweging het systeem in een (stabiele) trillingstoestand brengt welke niet meer van de beginvoorwaarde afhangt. We zullen dit verschijnsel tegenkomen bij een in § 5 te behandelen model van een klok en in § 6 bij de vergelijking van Van der Pol.

De grondslagen voor een adequate behandeling van de bij niet-lineaire vergelijkingen optredende problemen zijn gelegd door H. Poincaré die zijn resultaten echter alleen toepaste op de bewegingen van de hemellichamen. De eerste niet-lineaire problemen in engere zin ontstonden bij de opkomst van de radio-techniek. Vooral onze landgenoot Van der Pol heeft met zijn onderzoeken over de naar hem genoemde vergelijking veel succes

*) De paragrafen 8 en 9 zijn uitgewerkt door drs E.M. de Jager.

geoogst en vele andere wiskundigen voor dit gebied enthousiast gemaakt.

Later onderzoek vond en vindt nog hoofdzakelijk plaats in de U.S.S.R. Hieraan zijn de namen verbonden van o.a. Krylov en Bogolyubov, Andronov en Chaikin, en Mitropolski. Geleidelijk raakte het werk van de Russische school in het Westen bekend, vooral door de werken van Minorski en Lefschetz. Het zwaartepunt van de nieuwste onderzoekingen schijnt nog steeds in de U.S.S.R. te liggen.

Bibliografie

1. Krylov and Bogolyubov. Introduction to non-linear mechanics. Princeton (1943). (Vertaling door S. Lefschetz).
2. N. Minorski. Introduction to non-linear mechanics. Ann Arbor (1946).
3. Andronov and Chaikin. Theory of oscillations. Princeton (1949). (Vertaling door S. Lefschetz).
4. J.J. Stoker. Non-linear vibrations. New York (1950) (zeer aanbevolen).

§ 2. Lineaire trillingen

Als voorbereiding tot het onderzoek van de niet-lineaire verschijnselen beschouwen we de klassieke vergelijking van een harmonische oscillator met visceuse damping

$$(2.1) \quad \ddot{x} + \lambda \dot{x} + cx = 0.$$

Zoals we weten hangt het gedrag van de oplossingen van (2.1) af van de wortels van de karakteristieke vergelijking

$$(2.2) \quad \sigma^2 + \lambda\sigma + c = 0$$

nm1.

$$(2.3) \quad \sigma = -\frac{1}{2}\lambda \pm i\sqrt{c - \frac{1}{4}\lambda^2} \quad \text{als} \quad c - \frac{1}{4}\lambda^2 > 0,$$

of

$$(2.4) \quad \sigma = -\frac{1}{2}\lambda \pm \sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - c} \quad \text{als} \quad c - \frac{1}{4}\lambda^2 < 0.$$

I.h.a. kunnen we de oplossingen van (2.1) schrijven als

$$(2.5) \quad x = C_1 e^{\sigma_1 t} + C_2 e^{\sigma_2 t}$$

of in het bijzonder als $\omega^2 = c - \frac{1}{4}\lambda^2 > 0$

$$(2.6) \quad x = a e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \sin(\omega t + \varphi).$$

In het normale geval $\lambda > 0$ en $c > 0$ is er in het geval (2.3) en (2.6) een gedempte slingering en in het geval (2.4) en (2.5) een aperiodiek gedempte beweging.

Is $\lambda = 0$ en $c > 0$ dan is er een stationnaire harmonische beweging.

Is $\lambda < 0$, zogenaamde negatieve wrijving, dan neemt volgens (2.5) of (2.6) de amplitude van x onbepaald toe en wel hetzij periodiek hetzij aperiodiek.

Bij (2.6) merken we op dat telkens na een volle periode $2\pi/\omega$ de amplitude daalt met een vaste factor $\exp - \frac{\lambda\pi}{\omega}$.

Een geheel andere discussie van (2.1) wordt verkregen met behulp van een zogenaamd fasediagram waarbij de snelheid $\dot{x}$ tegen de uitwijking x uitgezet is. Stellen we $\dot{x} = y$ dan kunnen we (2.1) vervangen door het stelsel

$$(2.7) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda y - cx, \end{cases}$$

waaruit door deling

$$(2.8) \quad \frac{dy}{dx} = -\lambda - \frac{cx}{y}$$

volgt, een niet-lineaire vergelijking van de eerste orde. Het stelsel (2.7) bepaalt banen $x(t)$, $y(t)$ in het fasediagram. Stellen we ons tevreden met alleen de meetkundige aspecten van de baan dan kunnen we ons beperken tot (2.8). De tijd t kunnen we eventueel dan met behulp van

$$(2.9) \quad t = \int \frac{dx}{y}$$

bepalen.

We zullen hieronder nagaan welke banen verkregen worden in het periodieke geval ($\lambda > 0$, $c > \frac{1}{4} \lambda^2$) en het aperiodieke geval ($\lambda > 0$, $c < \frac{1}{4} \lambda^2$)

$$1. \quad \lambda > 0, \quad c > \frac{1}{4} \lambda^2.$$

Integratie van (2.8) leidt zonder moeite (homogeen type, stel $y=xv$) tot de oplossing

$$(2.10) \quad y^2 + \lambda xy + cx^2 = C \exp \left\{ \frac{\lambda}{\omega} \arctg \frac{2y + \lambda x}{2\omega x} \right\},$$

waarbij de arctg bij variërende x en y continu wordt voortgezet. Dit is voor elke (positieve) waarde van de integratieconstante C een (naar binnen draaiende) spiraal als in fig.2.1 aangegeven

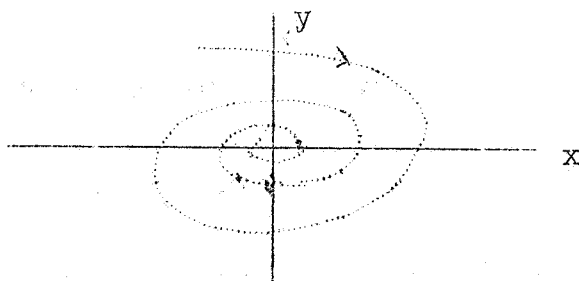


fig.2.1

De constructie van de integraalkrommen kan vereenvoudigd worden door de isoklinen te tekenen, d.w.z. de lijnen met een vaste dy/dx . In ons geval (2.8) zijn de isoklinen zeer eenvoudig nml. rechten door de oorsprong.

$$2. \quad \lambda > 0, \quad c < \frac{1}{4} \lambda^2.$$

De integratie van (2.8) leidt nu tot

$$(2.11) \quad \frac{(y - \sigma_1 x)^{\sigma_1}}{(y - \sigma_2 x)^{\sigma_2}} = C,$$

waarbij σ_1 en σ_2 de reële wortels van (2.2) zijn.

We maken nu een onderscheid al naar gelang σ_1 en σ_2 hetzelfde of verschillend teken bezitten. In het eerste geval geldt $0 < c < \frac{1}{4} \lambda^2$ met $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ (terugdrijvende kracht en uitwijking hebben hetzelfde teken)

De krommen (2.11) zijn enigszins gedeformeerde parabolen welke langs de isokline $y = \sigma_1 x$ ($\sigma_2 < \sigma_1 < 0$) tot de oorsprong naderen (zie fig.2.2)

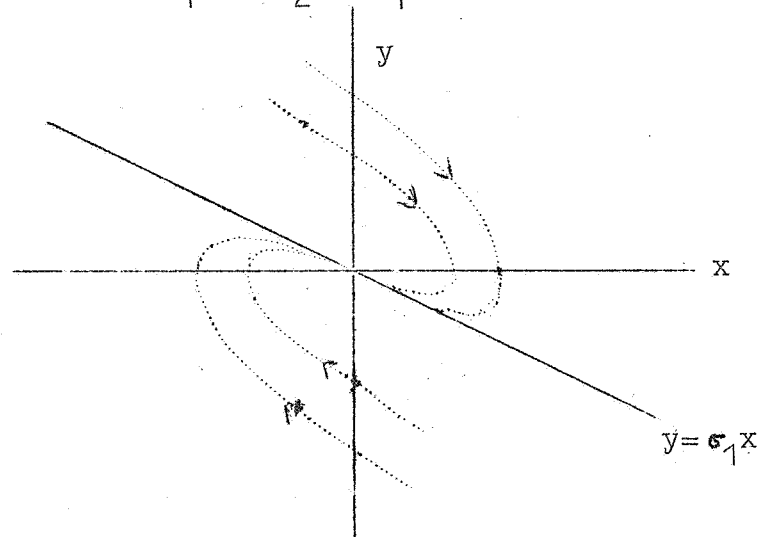


fig.2.2^a

In het tweede geval geldt $c < 0$ met σ_1 en σ_2 verschillend teken (terugdrijvende kracht en uitwijking hebben verschillend teken). De krommen (2.11) zijn enigszins gedeformeerde hyperbolen welke de isoklinen $y = \sigma_1 x$ en $y = \sigma_2 x$ tot asymptoten hebben

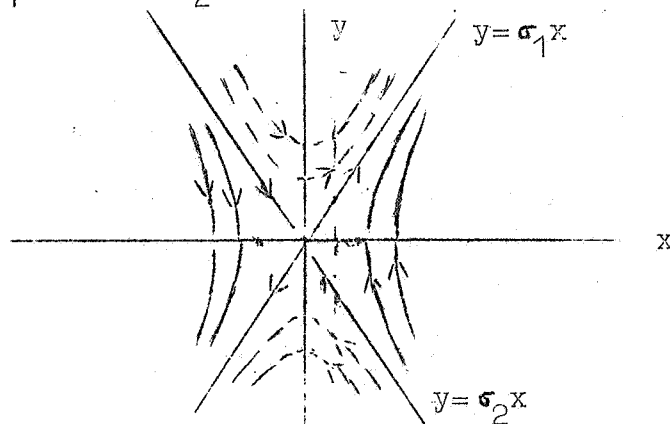


fig.2.2^b

Opgave. Behandel analoog het geval $c = \frac{1}{4} \lambda^2$.

Is $\lambda = 0$ en $c > 0$ dan gaan de fasekrommen over in gesloten ellipsen

$$(2.12) \quad y^2 + cx^2 = c$$

zoals o.a. uit (2.10) volgt.

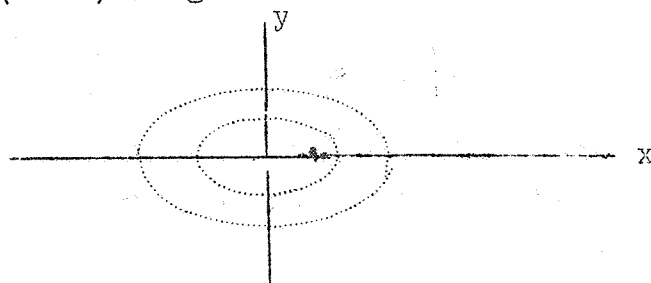


fig.2.3

Is $\lambda = 0$ en $c < 0$ dan worden de fasekrommen hyperbolen

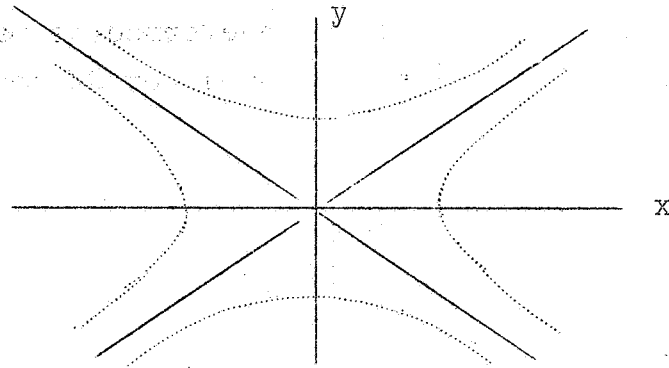


fig.2.4

Is tenslotte $\lambda < 0$ dan behoeven we in het voorgaande slechts t door $-t$ te vervangen d.w.z. in de fasekrommen de richting om te keren.

We beschouwen vervolgens de invloed van een periodieke uitwendige kracht. Kiezen we de eenheid van t zodanig dat $c=1$ dan kunnen we de desbetreffende vergelijking schrijven als

$$(2.13) \quad \ddot{x} + \lambda \dot{x} + x = g \cos \omega t, \quad \omega > 0.$$

De algemene oplossing is (zie 2.5)

$$(2.14) \quad x = C_1 e^{\sigma_1 t} + C_2 e^{\sigma_2 t} + \operatorname{Re} \frac{g e^{i \omega t}}{1 - \omega^2 + i \lambda \omega}.$$

In het normale geval ($\lambda > 0$, $c > 0$) met $\operatorname{Re} \sigma_1 < 0$ en $\operatorname{Re} \sigma_2 < 0$ convergeren de eerste twee termen in het rechterlid van (2.14) tot nul zodat voor $t \rightarrow \infty$ de asymptotische oplossing

$$(2.15) \quad x_{\infty} = g \frac{(1 - \omega^2) \cos \omega t + \lambda \omega \sin \omega t}{(1 - \omega^2)^2 + \lambda^2 \omega^2}$$

verkregen wordt. We houden m.a.w. alleen een beweging met de frequentie van de opgedrukte kracht over. De component met de eigenfrequentie van het systeem is voor $t \rightarrow \infty$ weggedempt.

We merken op dat de damping λ maakt dat de asymptotische beweging en de opgedrukte kracht in fase verschillen. Voor de amplitude van x_{∞} vinden we gemakkelijk

$$(2.16) \quad g V = g \left\{ (1 - \omega^2)^2 + \lambda^2 \omega^2 \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

waarbij V de versterkingsfactor heet. De grafiek van V als functie van ω met de parameterwaarden λ geeft een familie van zgn. responsiekrommen (zie fig.2.5)

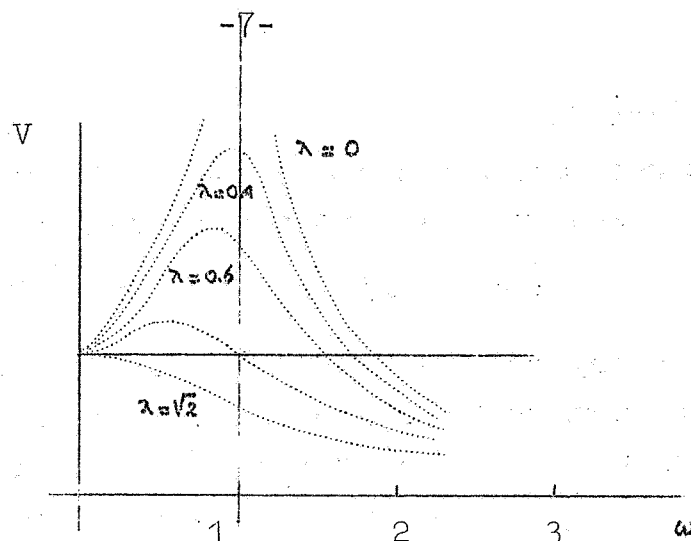


fig.2.5

We merken hierbij even op dat $V_{\max} = \frac{2}{\lambda \sqrt{4-\lambda^2}}$ voor $\omega = \sqrt{1-\frac{1}{2}\lambda^2}$ voorzover $\lambda < \sqrt{2}$.

Voor $\lambda = 0$ is zelfs $V(1) = \infty$ d.i. het geval van zuivere resonantie. Ter toelichting van het geval van zuivere resonantie merken we op dat (2.13) de volgende particuliere oplossing bezit

$$(2.17) \quad x = g \frac{\cos t - \cos \omega t}{\omega^2 - 1},$$

met voor $\omega \rightarrow 1$

$$(2.18) \quad x = \frac{1}{2} g t \sin t,$$

hetgeen gemakkelijk door limietovergang verkregen kan worden. Inderdaad neemt bij (2.18) de amplitude onbeperkt toe.

We zullen later (§ 7) zien hoe het resonantieverschijnsel en de responsiekrommen beïnvloed worden door de aanwezigheid van een niet-lineaire term.

§ 3. Singulariteiten

Bij het bestuderen van niet-lineaire verschijnselen stuiten we vaak op een stelsel differentiaalvergelijkingen van het type

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = P(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y).$$

Een bijzonder, maar zeer belangrijk, geval hebben we reeds in de vorige paragraaf (2.7) ontmoet. Hier beschouwen we het stelsel (3.1) van algemener standpunt. De algemene theorie van (3.1) danken wij aan H. Poincaré en M.A. Lyapunov (omstreeks 1900). We zullen ons hier slechts tot een paar algemene resultaten beperken. Uit (3.1) kunnen we een fase-diagram afleiden waarbij de fasekrommen bepaald zijn door

$$(3.1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

Een punt waarvoor $P=Q=0$ heet een singulier punt. Vatten we t als de tijd op dan kunnen we de singuliere punten opvatten als rustpunten van de beweging, d.w.z. als stabiele of labiele evenwichtsposities. We kunnen zeggen dat het globale gedrag van de oplossingen van (3.1) of (3.2) geheel bepaald is door de aard van de singulariteiten. We beschouwen daarom het gedrag van de oplossingen in een zo kleine omgeving van de singulariteit (x_0, y_0) dat hierin P en Q in een Taylorreeks ontwikkeld kunnen worden. Verplaatsen we de singulariteit naar de oorsprong met behulp van een translatie dan is bijv.

$$(3.2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+Q_1(x,y)}{cx+dy+P_1(x,y)}.$$

We nemen aan dat de determinant $\Delta = ad-bc \neq 0$ is. Poincaré en Lyapunov hebben bewezen dat als P_1 en Q_1 in de oorsprong nul zijn van de orde x^2+y^2 het gedrag in de omgeving van deze singulariteit volledig kan worden beschreven door het eenvoudiger stelsel

$$(3.3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}.$$

Nemen we aan dat de coëfficiënt $d \neq 0$ is dan kunnen we met een trucje de discussie van (3.3) herleiden tot die van (2.8) in de vorige paragraaf. Voeren we namelijk een nieuwe (scheve) y -as in met behulp van de substitutie

$$(3.4) \quad \eta = cx + dy$$

dan gaat (3.3) over in

$$(3.5) \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{\Delta x + (b+c)\eta}{\eta}$$

d.w.z. de vergelijking (2.8) met $\lambda = -b-c$ en $c = -\Delta$. De typen van de singulariteit van (3.3) zijn dus voorzover $d \neq 0$ precies die van de trillingsvergelijking (2.1) van de vorige paragraaf.

Het geval $d=0$ kunnen we gemakkelijk even apart behandelen. De vergelijking (3.3) is dan van de vorm

$$(3.6) \quad \frac{dy}{dx} = \alpha + \beta \frac{y}{x}$$

waarvan de oplossingen parabolen zijn:

$$(3.7) \quad y = \frac{\alpha x}{1-\beta} + C|x|^\beta \quad \text{voor } \beta \neq 1$$

en

$$(3.8) \quad y = \alpha x \ln|x| + Cx \quad \text{voor } \beta = 1.$$

We komen aldus tot de volgende klassificatie

$$1. \quad b+c \neq 0, d \neq 0, \Delta + \frac{1}{4}(b+c)^2 < 0$$

De phasekrommen zijn spiralen

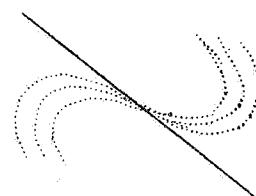
De singulariteit heet een wervelpunt.



$$2. \quad b+c \neq 0, d \neq 0, \Delta + \frac{1}{4}(b+c)^2 \geq 0 \text{ en } \Delta < 0$$

De phasekrommen zijn gedeformeerde parabolen

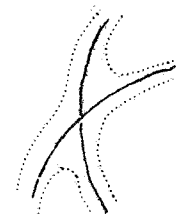
De singulariteit heet een knoop.



$$3. \quad b+c \neq 0, d \neq 0, \Delta > 0$$

De phasekrommen zijn gedeformeerde hyperbolen

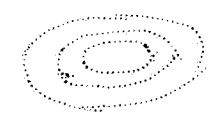
De singulariteit heet een zadelpunt.



$$4. \quad b+c=0, d \neq 0, \Delta < 0$$

De phasekrommen zijn ellipsen

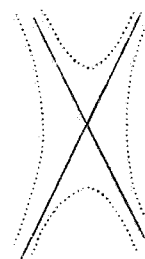
De singulariteit heet een wervelpunt.



$$5. \quad b+c=0, d \neq 0, \Delta > 0$$

De phasekrommen zijn hyperbolen

De singulariteit heet een zadelpunt.

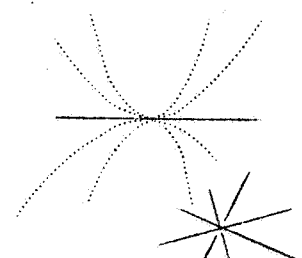


$$6. \quad d=0$$

De phasekrommen zijn gedeformeerde parabolen

De singulariteit heet een knoop.

In het bijzonder kunnen hierbij gewone parabolen of zelfs rechte lijnen optreden.



Een ander belangrijk resultaat van Poincaré betreft het optreden van limietcycli. Een limietcyclus is een gesloten kromme C in het fase-diagram zodanig dat de fasekrommen in de omgeving van C bestaan uit spiralen welke tot C convergeren. Afhankelijk van de tijd-zin kan men spreken van stabiele en labiele limietcycli. Uiteraard is een limietcyclus zelf een fasekromme. Er kunnen i.h.a. meer limietcycli naast elkaar bestaan.

De existentie van een limietcyclus is meestal een ingewikkelde zaak. Soms kan men nog wel met eenvoudige hulpmiddelen tot het bestaan van een limietcyclus besluiten waartoe Poincaré en Bendixson enige algemene stellingen hebben opgesteld. Maar vaak moet men zijn toevlucht nemen tot krachtiger topologische hulpmiddelen als de dek-puntsstellingen van o.a. Banach, Schauder, Tichonov en Brouwer.

§ 4. Conservatieve systemen

Bij een conservatieve beweging wordt de teruggedrijvende kracht afgeleid van een potentiaal $P(x)$ zodat de desbetreffende vergelijking van het volgende type is

$$(4.1) \quad \ddot{x} + P'(x) = 0.$$

Deze vergelijking laat zich zonder moeite integreren. Uit (4.1) volgt namelijk eerst

$$(4.2) \quad \frac{1}{2} \dot{x}^2 + P(x) = \text{constant}$$

en vervolgens

$$(4.3) \quad t = \int^x \frac{dx}{\sqrt{C - 2P(x)}}.$$

De beweging laat zich het gemakkelijkst vervolgen aan de hand van het fasediagram. Stellen we $\dot{x} = y$ dan is (4.1) equivalent met

$$(4.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -P'(x), \end{cases}$$

of met

$$(4.5) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{P'(x)}{y}.$$

De singulariteiten volgen uit $y=0$ en $P'(x)=0$ en corresponderen dus met de extrema van $P(x)$. De integraalkrommen van (4.5) zijn in overeenstemming met (4.2) gegeven door

$$(4.6) \quad y^2 + 2 P(x) = C.$$

De minima van $P(x)$ geven wervelpunten omgeven door gesloten ellipsvormige banen. De maxima van $P(x)$ geven zadelpunten omgeven door hyperboolvormige banen (gevallen 3 en 5). Uiteraard corresponderen de wervelpunten met stabiele evenwichtsposities, de zadelpunten met labiele.

De vergelijking van de mathematische slinger is een bekend voorbeeld van het type (4.1) nml.

$$(4.7) \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0.$$

Volgens (4.3) is de oplossing

$$(4.8) \quad t = \int^{\theta} \frac{du}{\sqrt{C + 2 \omega^2 \cos \theta}}$$

hetgeen met behulp van elliptische functies in een expliciete vorm gebracht kan worden.

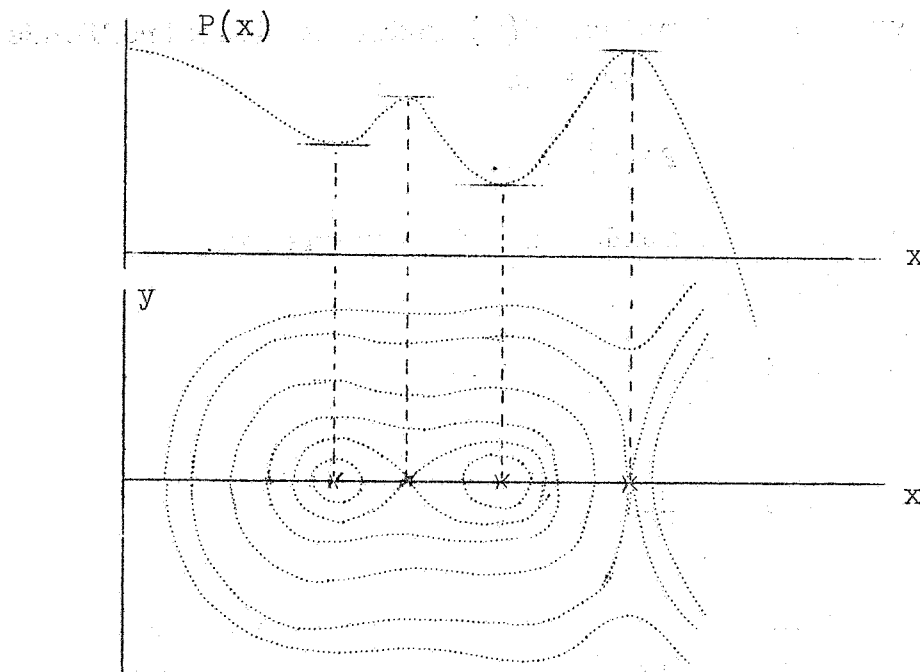


fig.4.1

§ 5. Theorie van de klok

Bij een klok wordt de door wrijving verloren gegane energie telkens aangevuld van buitenaf, bijv. als potentiële energie van een zich ontspannende veer of een dalend gewicht. We beschouwen twee modellen, één met visceuse wrijving en één met droge of Coulomb wrijving. In beide gevallen denken we ons de energie portiegewijs toegevoerd, bijv. telkens als de slinger in positieve zin door de evenwichtsstand gaat.

We beginnen met het model met visceuse wrijving (luchtweerstand).

De slingerbeweging zij bepaald door

$$(5.1) \quad \ddot{x} + \lambda \dot{x} + x = 0,$$

waarbij zeker $\lambda < 2$.

We veronderstellen dat telkens als $x=0$ (en $\dot{x} > 0$) momentaan een constante hoeveelheid energie $\frac{1}{2}h^2$ wordt toegevoegd. We stellen weer $\dot{x}=y$ (zie fig.5.1). Starten we de beweging in het punt $(0, y_0)$, waarbij $y_0 > 0$, dan is na één omloop de snelheid volgens (2.6) gezakt tot θy_0 , waarbij $\theta = \exp - \frac{\lambda \pi}{\omega}$. Toevoeging van een portie energie $\frac{1}{2}h^2$ doet de snelheid weer stijgen tot

$$(5.2) \quad y_1 = \sqrt{h^2 + \theta^2 y_0^2}.$$

Iteratie volgens

$$(5.3) \quad y_{n+1} = \sqrt{h^2 + \theta^2 y_n^2}, \quad n=0, 1, \dots$$

levert een reeks $y_0, y_1, y_2, \dots$ die tot een limiet v convergeert, zoals o.a. de volgende (grafische) beschouwing leert (zie fig. 5.2). In een (y, z) -vlak tekenen we de grafieken $z=y$ en $z = \sqrt{h^2 + \theta^2 y^2}$. Iteratie volgens (5.3) correspondeert met een trapjeslijn die tot het snijpunt van beide grafieken nadert. Voor dit snijpunt geldt $v = \sqrt{h^2 + \theta^2 v^2}$, of

$$(5.4) \quad v = \frac{h}{\sqrt{1 - \theta^2}}.$$

Uiteraard kan de existentie van de limiet van y_n ook gemakkelijk analytisch bewezen worden, bijv. door aan te tonen dat y_n monotoon stijgt of daalt en begrensd is.

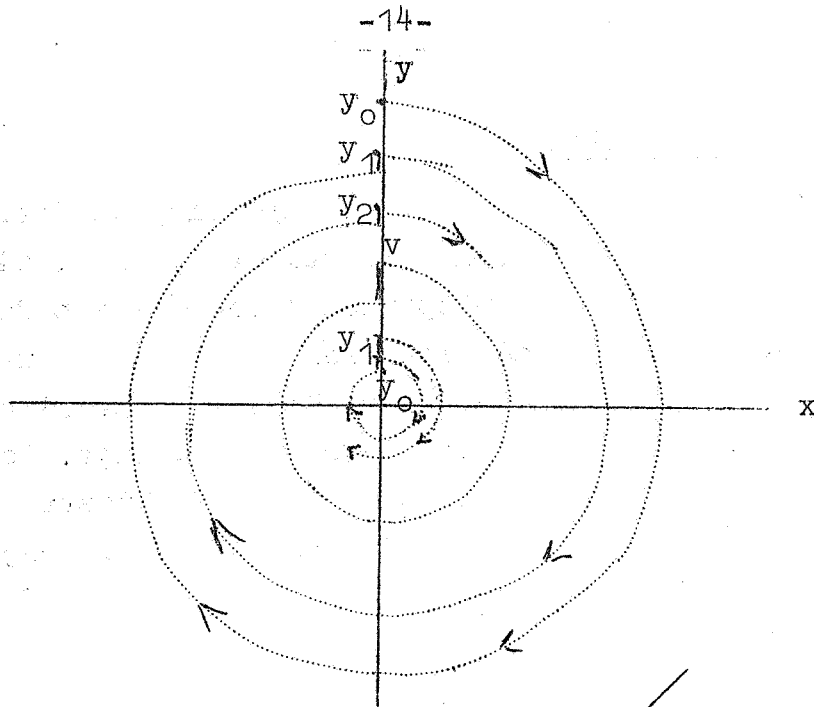


fig.5.1

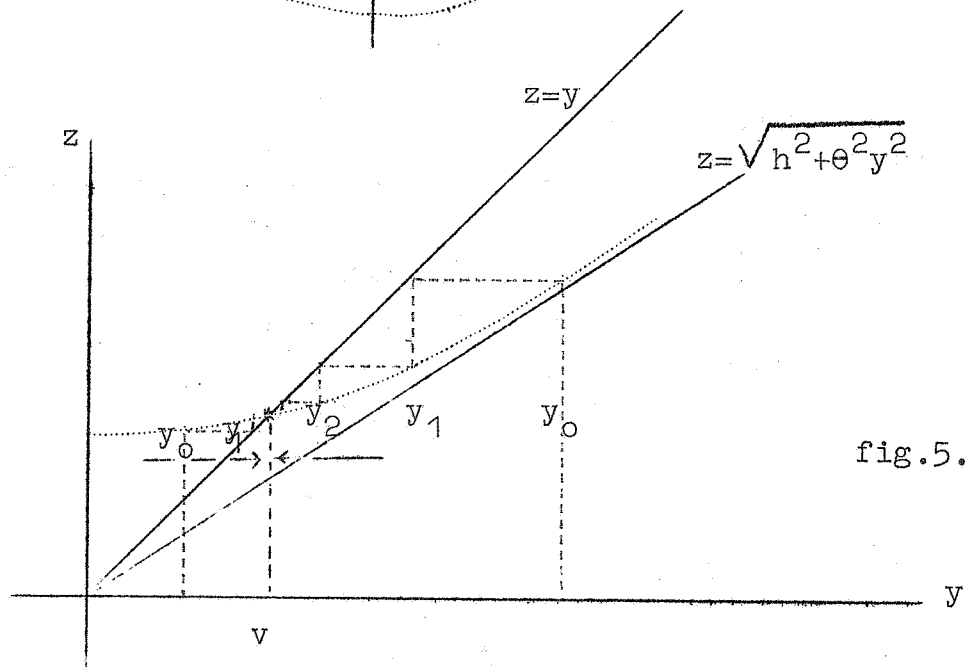


fig.5.2

Er is dus precies één gesloten fasekromme welke vanuit een willekeurige beginvoorwaarde als limiettoestand bereikt wordt. Dit betekent dat ook de kleinste beginstoot onze klok aan het lopen zou krijgen, iets wat in de praktijk zeker niet waar is. In het tweede model zal blijken dat dit niet meer het geval is en dat er een soort drempelwaarde bestaat.

Bij het model met droge wrijving moeten we (5.1) vervangen door

$$(5.5) \quad \ddot{x} + \lambda \operatorname{sgn} \dot{x} + x = 0$$

of

$$(5.6) \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = -\lambda & \text{voor } \dot{x} > 0, \\ \ddot{x} + x = \lambda & \text{voor } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Het fasediagram van de eerste vergelijking van (5.6) volgt uit

$$(5.7) \quad y \frac{dy}{dx} + x + \lambda = 0, \quad y > 0$$

en bestaat dus uit halve cirkels

$$(5.8) \quad x^2 + y^2 + 2\lambda x = C, \quad y > 0$$

met gemeenschappelijk middelpunt $(-\lambda, 0)$. Voor de tweede vergelijking van (5.6) vindt men analoog halve cirkels in het benedenhalfvlak

$$(5.9) \quad x^2 + y^2 - 2\lambda x = C, \quad y < 0$$

met gemeenschappelijk middelpunt $(\lambda, 0)$, (zie fig.5.3).

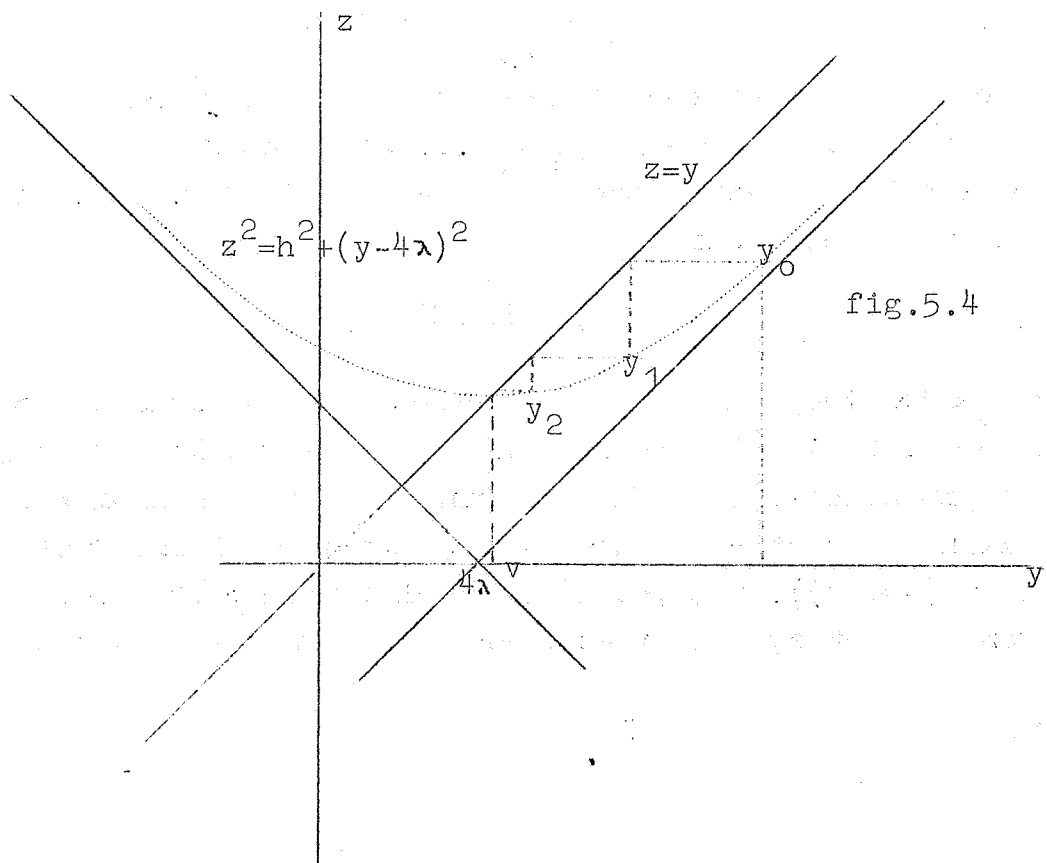
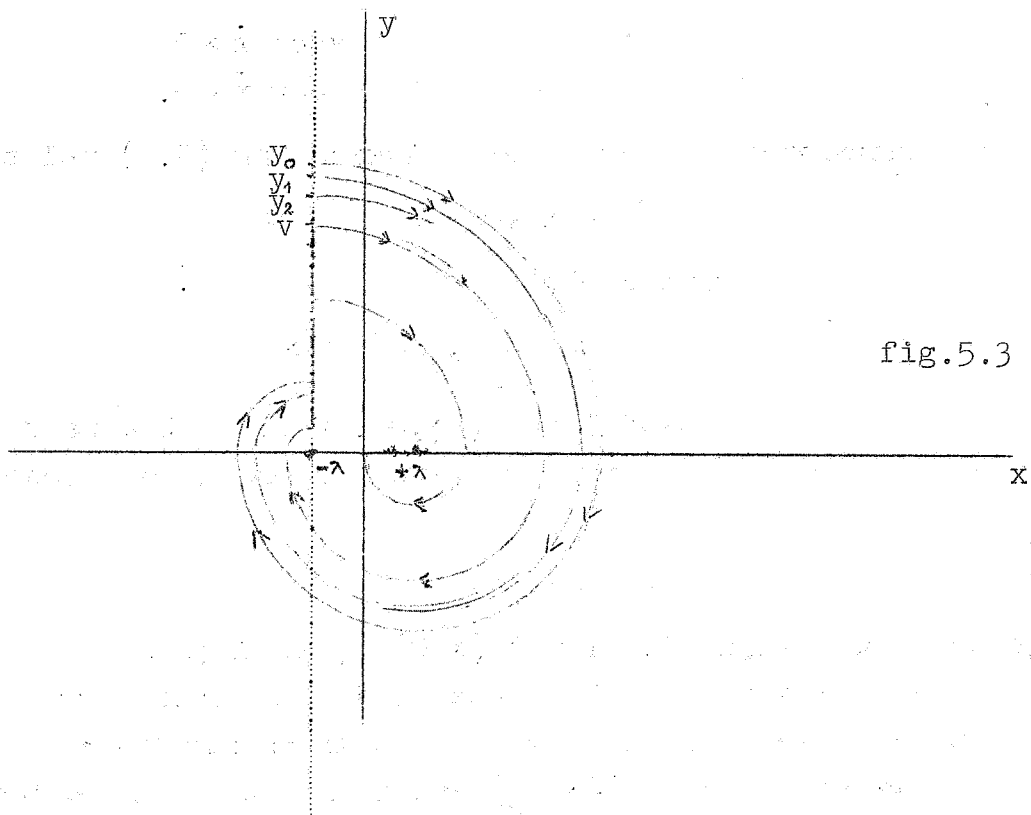
Teneinde de discussie iets te vereenvoudigen nemen we aan dat de porties energie $\frac{1}{2}h^2$ worden toegediend telkens als $x = -\lambda$ en $y > 0$. Starten we de beweging in $(-\lambda, y_0)$ dan is na een volle omloop het fasepunt aangekomen bij $(-\lambda, y_0 - 4\lambda)$ mits $y_0 > 4\lambda$. Toevoeging van het portie energie doet de snelheid weer stijgen tot

$$(5.10) \quad y_1 = \sqrt{h^2 + (y_0 - 4\lambda)^2}.$$

Analoog als bij het vorige model zetten we dit proces onbepaald voort waardoor een rij $y_0, y_1, y_2, \dots$ ontstaat waarvan de convergentie weer gemakkelijk aangetoond kan worden (zie fig.5.4). Voor de limiet v vinden we gemakkelijk

$$(5.11) \quad v = \frac{h^2 + 16\lambda^2}{8\lambda}.$$

Als $y_0 < 4\lambda$ loopt het fasepunt ergens op het segment $(-\lambda, \lambda)$ van de x -as dood. Om in dit model de klok op gang te kunnen krijgen is dus een beginsnelheid y_0 nodig van minstens 4λ . De limiet v moet natuurlijk ook groter dan 4λ zijn (anders loopt het fasepunt weer dood op $(-\lambda, +\lambda)$). Uit (5.11) volgt dan dat $h > 4\lambda$ d.w.z. dat de telkens toegevoegde porties energie niet te klein mogen zijn.

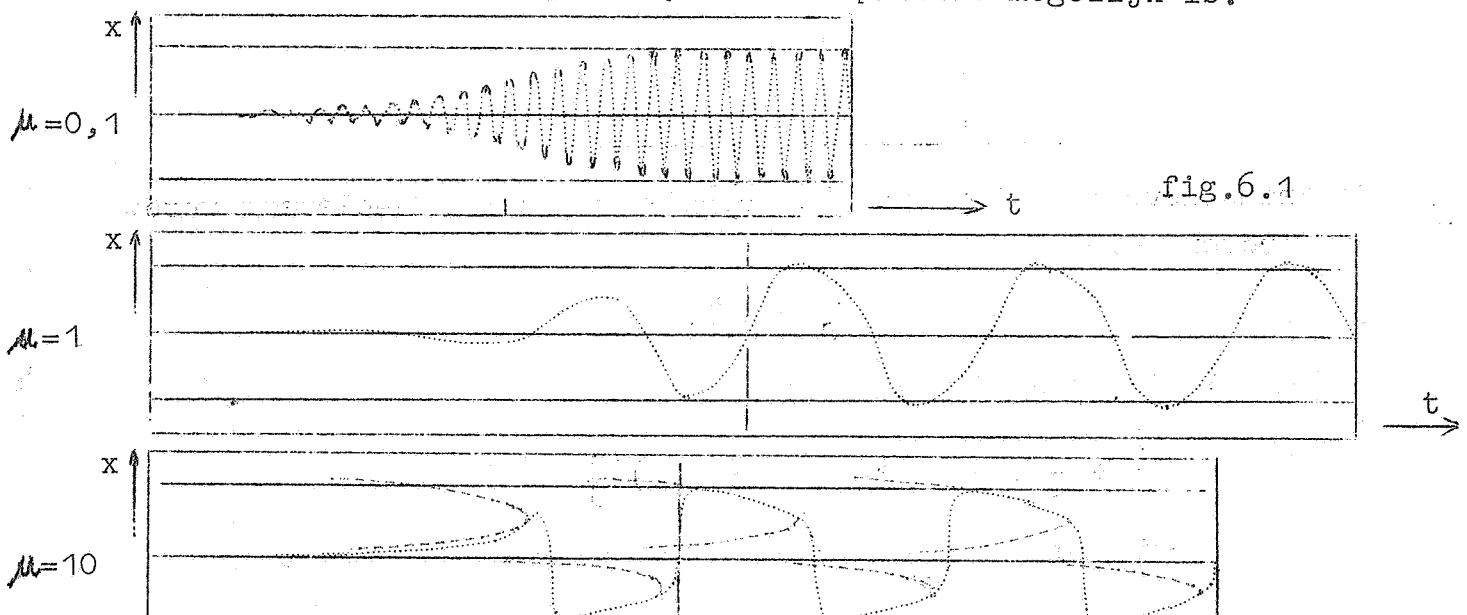


§ 6. De vergelijking van Van der Pol

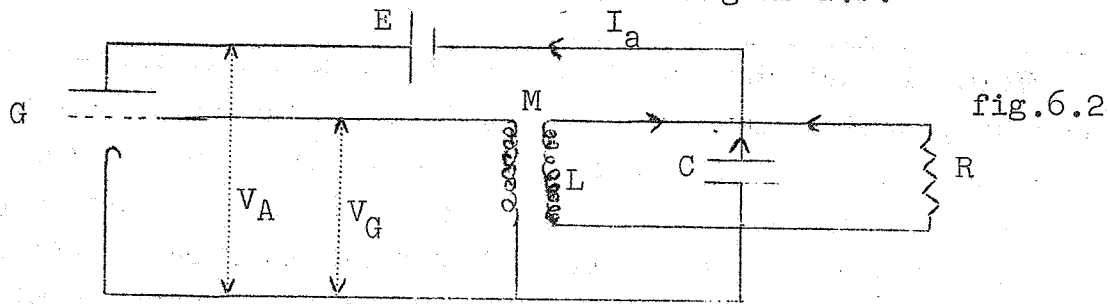
Vele elektrische schakelingen met zogenaamde niet-lineaire elementen, zoals bijv. een triode, blijken een type trillingen te vertonen welke niet met behulp van de lineaire theorie beschreven kunnen worden. In 1920 slaagde Van der Pol er in (Radio Review, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations) voor een dergelijke schakeling een passende niet-lineaire beschrijving te vinden. We zullen hieronder laten zien hoe uit de door hem onderzochte triode-schakeling een gewone niet-lineaire differentiaalvergelijking afgeleid kan worden. Met een passende keuze van eenheden is deze vergelijking van de volgende vorm

$$(6.1) \quad \ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0,$$

waarbij μ een parameter is. In een volgend artikel (Phil.Mag.2 (1926), On relaxation oscillations) heeft Van der Pol deze vergelijking nader onderzocht, o.a. met behulp van faseplaatjes. Deze vergelijking, later naar Van der Pol genoemd, heeft aanleiding gegeven tot een stroom van publicaties, waarin de vergelijking van Van der Pol en verwante typen vergelijkingen van verschillend standpunt beschouwd worden. Om een idee te geven van de aard van de trillingen welke door (6.1) beschreven worden geven we onderstaand plaatje waarin de gevallen $\mu=0.1$, 1, 10 geschetst zijn. Het eigenaardige is dat in alle gevallen er onafhankelijk van de beginvoorwaarde een trillingstoestand ontstaat met een zeer bepaalde amplitude anders dan bij een harmonische trilling waarbij in principe elke amplitude mogelijk is.



De door Van der Pol onderzochte schakeling is a.v.



De toepassing van de wetten van Kirchhoff geeft voor de anode-stroom I_A

$$(6.2) \quad I_A = I_L + I_C + I_R,$$

en voor de anodepotentiaal V_A

$$(6.3) \quad E - V_A = L \dot{I}_L = C^{-1} \int I_C dt = R I_R.$$

Uit (6.2) en (6.3) volgt voor $I = I_L$

$$(6.4) \quad LC \ddot{I} + \frac{L}{R} \dot{I} + I = I_A.$$

De eigenschappen van de triode zijn vastgelegd in de karakteristiek

$$(6.5) \quad I_A = \varphi(V), \quad V = V_G + D V_A,$$

waarbij D een positieve constante is.

De functie $\varphi(V)$ ziet er uit als een langgerekte s met een buigpunt op de plaats DE.

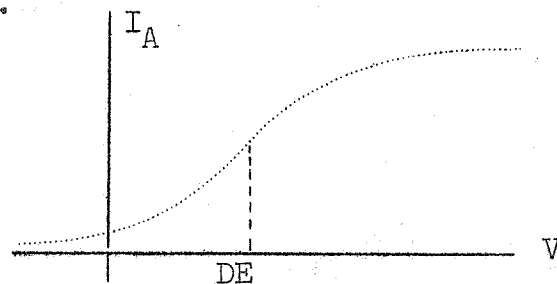


fig.6.3

De inductieve koppeling van het rooster aan het LCR-element wordt beschreven door

$$(6.6) \quad V_G = M \dot{I}.$$

Uit (6.4), (6.5) en (6.6) volgt dus

$$(6.7) \quad LC \ddot{I} + \frac{L}{R} \dot{I} + I = \varphi \{ DE + (M - LD) \dot{I} \}.$$

We veronderstellen dat de schakeling zodanig is dat $M - LD > 0$.

We kunnen (6.7) nog vereenvoudigen indien we in de karakteristiek $\varphi(V)$ het buigpunt naar de oorsprong verschuiven. We stellen daartoe

$$(6.8) \quad V = DE + y, \quad \varphi(V) = \varphi(DE) + f(y),$$

met dus $y=(M-LD)\dot{I}$, waarbij $f(y)$ een eenvoudiger functie is en wel één die we goed kunnen benaderen als

$$(6.9) \quad f(y) = ay-by^3.$$

Aldus gaat (6.7) over in

$$(6.10) \quad LC\ddot{y} + \frac{L}{R} \dot{y} + y = (M-LD)f'(y)\dot{y},$$

of

$$(6.11) \quad LC\ddot{y} - \dot{y}(A-By^2) + y = 0,$$

met $A=(M-LD)a - \frac{L}{R}$ en $B=3(M-LD)b$, hetgeen inderdaad aequivalent met (6.1) is (mits $A > 0$).

We beschouwen nu in de eerste plaats de oplossingen van (6.1) zoals deze grafisch met behulp van de faseplaatjes gevonden kunnen worden. In de tweede plaats zullen we nagaan wat we met een analytische behandeling kunnen bereiken.

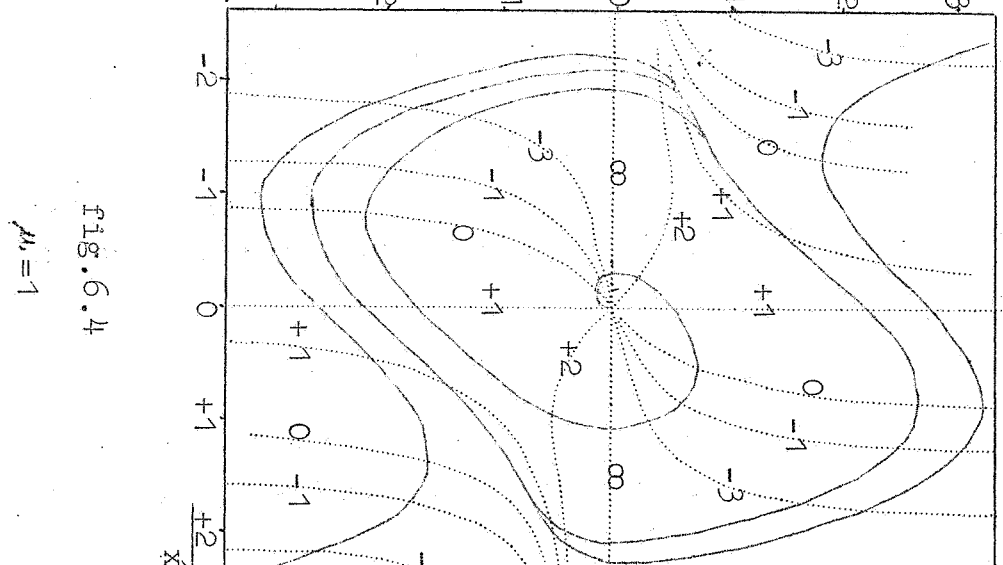
Stellen we als vroeger $\dot{x}=y$ dan is (6.1) aequivalent met het stelsel

$$(6.12) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1-x^2)y-x, \end{cases}$$

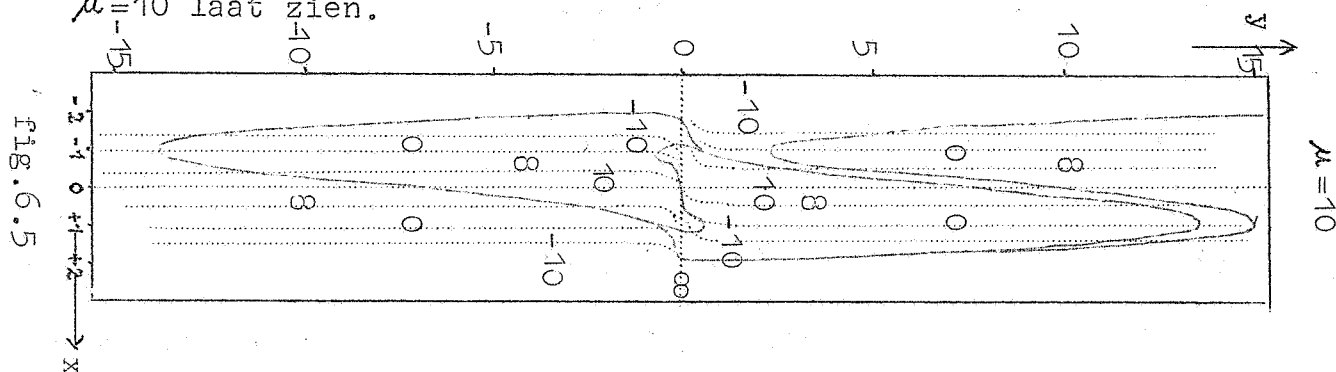
of met

$$(6.13) \quad \frac{dy}{dx} = \mu(1-x^2) - \frac{x}{y}.$$

De bij (6.13) behorende isoklinen zijn derdegraadskrommen. Uit de onderstaande schets voor $\mu=1$



blijkt dat wanneer men van een willekeurig beginpunt uitgaat de integraalkromme spiraalsgewijze tot een vaste limietcyclus nadert. De limietcyclus, zelf een integraalkromme, correspondeert voor (6.1) met een periodieke oplossing. Beschouwen we deze limietcyclus in afhankelijkheid van de parameter μ dan blijkt voor $\mu \rightarrow 0$ de cyclis tot een cirkel te naderen terwijl voor $\mu \rightarrow \infty$ de cyclis een sterk gedeformeerde vorm heeft zoals onderstaand faseplaatje voor $\mu=10$ laat zien.



Inderdaad gaat voor $\mu \rightarrow 0$ de periodieke beweging over in een harmonische trilling en voor $\mu \rightarrow \infty$ in een z.g. relaxatietrilling.

Het geval $\mu \rightarrow 0$ laat zich ook gemakkelijk analytisch overzien. Voeren we in (6.13) poolcoördinaten in dan geldt

$$(6.14) \quad dr = \mu \sin \varphi (1 - r^2 \cos^2 \varphi) (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi).$$

Voor de limietcyclus poneren we

$$(6.15) \quad r = r_0 + \mu r_1(\varphi) + \mu^2 r_2(\varphi) + \dots$$

Substitutie in (6.14) geeft in eerste orde benadering

$$(6.16) \quad dr_1 = -r_0 \sin^2 \varphi (1 - r_0^2 \cos^2 \varphi) d\varphi.$$

Aangezien de cyclis gesloten is moet $\int_0^{2\pi} dr_1 = 0$ zijn, dus

$$(6.17) \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 - r_0^2 \cos^2 \varphi) d\varphi = 0,$$

waaruit onmiddellijk $r_0 = 2$ volgt.

De "nulde orde" benadering van de limietcyclus voor $\mu \rightarrow 0$ is dus de cirkel $x^2 + y^2 = 4$, hetgeen correspondeert met de harmonische trilling

$$(6.18) \quad x = 2 \sin t.$$

Het verrassende resultaat is dus verkregen dat voor kleine waarden van μ een willekeurige begintoestand leidt tot een (in de limiet)

periodieke oplossing welke zeer weinig van de harmonische oplossing verschilt. De amplitude is hierbij gefixeerd op de waarde 2 onafhankelijk van de beginvoorwaarden.

De andere limietsituatie, voor $\mu \rightarrow \infty$, is slecht te overzien. Beter lukt het door op de vergelijking van Van der Pol eerst een door Liénard aangegeven transformatie toe te passen. Stel nml. $t = \mu \tau$ zodat (6.1) overgaat in

$$(6.19) \quad \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2 x}{d\tau^2} - (1-x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0,$$

en vervolgens

$$v = \frac{1}{\mu^2} \frac{dx}{d\tau} - x + \frac{1}{3} x^3,$$

zodat

$$(6.20) \quad \begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = -x \\ \frac{dx}{d\tau} = \mu^2 (v+x - \frac{1}{3} x^3), \end{cases}$$

of

$$(6.21) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{-x}{\mu^2 (v+x - \frac{1}{3} x^3)}.$$

Het faseplaatje van (6.21) is voor $\mu \rightarrow \infty$ aanzienlijk eenvoudiger dan het vorige

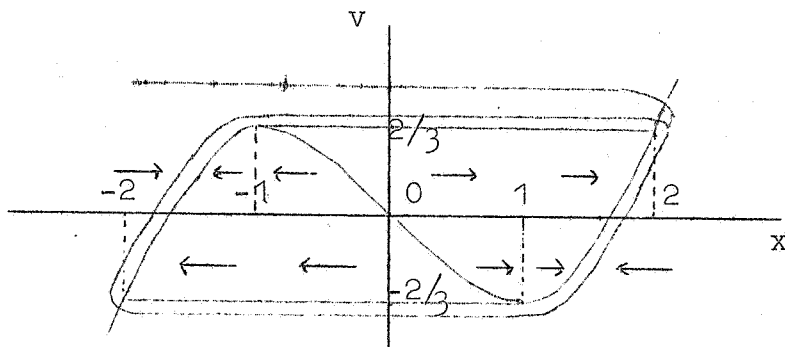


fig.6.6

Is μ zeer groot dan bestaat de limietcyclus blijkbaar uit twee genoeg rechte stukken ($v = \pm 2/3$) en twee gebogen stukken welke dicht bij de zgn. kritieke kromme $v = -x + \frac{1}{3} x^3$ aansluiten.

In het limietgeval $\mu \rightarrow \infty$ is de limietcyclus discontinu geworden. De vorm van de beweging volgt nu gemakkelijk uit (6.19).

Uit (6.19) volgt nml. voor $\mu \rightarrow \infty$

$$(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} = x,$$

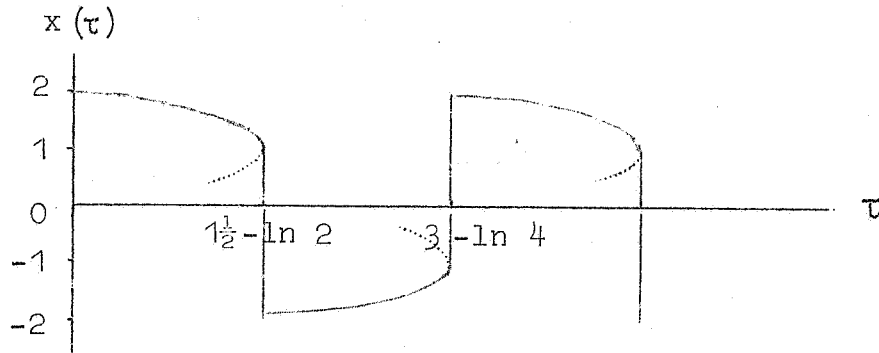
waaruit na integratie volgt dat

$$(6.22) \quad \tau - \tau_0 = \ln \left| \frac{x}{x_0} \right| + \frac{1}{2} (x_0^2 - x^2).$$

De boog $1 < x < 2$ van de limietcyclus levert dus voor $x(\tau)$ de parabolische boog (zie fig.6.7)

$$(6.23) \quad \tau = -\ln \frac{x}{2} + (2 - \frac{1}{2}x^2), \quad 1 < x < 2.$$

Het horizontale stuk $v = -2/3$ geeft voor $x(\tau)$ een ogenblikkelijke overgang van $x=1$ op $x=-2$. De rest volgt uit symmetrie. Op deze wijze verkrijgen we



In de oorspronkelijke tijdvariabele van (6.1) is de periode van de limietbeweging dus asymptotisch gelijk aan

$$(6.24) \quad T = (3 - \ln 4)\mu = 1.614\mu, \quad \mu \rightarrow \infty,$$

terwijl

$$(6.25) \quad t = 2\pi, \quad \mu \rightarrow 0.$$

Een nauwkeurige, en vrij gecompliceerde, analyse (Dorodnitsyn 1947) toont aan dat voor $\mu \rightarrow \infty$

$$(6.26) \quad T = 1.614\mu + 7.014\mu^{-1/3} - \frac{22}{9} \frac{\ln \mu}{\mu} + \dots$$

§ 7. De vergelijking van Duffing

In 1918 heeft Duffing de volgende niet-lineaire differentiaalvergelijking beschouwd

$$(7.1) \quad \ddot{x} + \lambda \dot{x} + (x + \varepsilon x^3) = g \cos \omega t.$$

We kunnen dit opvatten als de beschrijving van een visceus gedempte slinger met een niet-lineaire terugdrijvende kracht waarop een periodieke uitwendige kracht $g \cos \omega t$ wordt uitgeoefend.

De discussie van de oplossingen van (7.1) is i.h.a. zeer ingewikkeld. De aanwezigheid van het rechterlid $g \cos \omega t$ maakt dat we niet van het fasevlak gebruik kunnen maken. We zijn nu geheel aangewezen op analytische hulpmiddelen als reeksontwikkeling. We veronderstellen hierbij dat ε een kleine parameter is zoda we reeksontwikkelingen naar opklimmende machten van ε kunnen opstellen.

We merken eerst op dat bij afwezigheid van de uitwendige kracht het systeem slechts een gedempte beweging uitvoert. Er zijn dus geen relaxatietrillingen. De veerkracht $x + \varepsilon x^3$ zullen we hard noemen als $\varepsilon > 0$ en zacht als $\varepsilon < 0$, dit uiteraard in vergelijking met de lineaire veerkracht $\varepsilon = 0$.

Voorerst veronderstellen we $\lambda = 0$, dus

$$(7.2) \quad \ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = g \cos \omega t,$$

methode van Duffing.

We zoeken naar harmonische oplossingen met dezelfde frequentie als de opgedrukte kracht. We schrijven eerst (7.2) als

$$(7.3) \quad \ddot{x} = -x - \varepsilon x^3 + g \cos \omega t,$$

en stellen als eerste benadering

$$(7.4) \quad x_0 = a \cos \omega t.$$

Uit (7.3) volgt voor de tweede benadering

$$(7.5) \quad \ddot{x}_1 = -x_0 - \varepsilon x_0^3 + g \cos \omega t$$

of

$$(7.6) \quad \ddot{x}_1 = -(a + \frac{3}{4} \varepsilon a^3 - g) \cos \omega t - \frac{1}{4} \varepsilon a^3 \cos 3\omega t,$$

waarbij gebruik is gemaakt van de identiteit

$$(7.7) \quad \cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t.$$

Uit (7.6) volgt onmiddellijk de periodieke oplossing

$$(7.8) \quad x_1 = \frac{1}{\omega^2} \left(a + \frac{3}{4} \varepsilon a^3 - g \right) \cos \omega t + \frac{1}{36 \omega^2} \varepsilon a^3 \cos 3 \omega t.$$

Wil dus x_0 een goede benadering zijn, zodanig dat x_1 alleen een verfijning in een hoger harmonische bijdraagt, dan moet

$$(7.9) \quad \omega^2 = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 - \frac{g}{a}.$$

verbeterde methode

Een betere iteratiemethode wordt verkregen door (7.3) te schrijven als

$$(7.10) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - 1)x - \varepsilon x^3 + g \cos \omega t.$$

We starten weer met de eerste benadering (7.4). Dan volgt weer met gebruikmaking van (7.7) uit (7.10) voor x_1

$$(7.11) \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left\{ (\omega^2 - 1)a - \frac{3}{4} \varepsilon a^3 + g \right\} \cos \omega t - \frac{1}{4} \varepsilon a^3 \cos 3 \omega t.$$

Nu komt een heel belangrijke opmerking. De aanwezigheid van een term $\cos \omega t$ in het rechterlid van 7.11 geeft aanleiding tot een niet-periodieke oplossing welke een term bevat als $t \sin \omega t$. We noemen dit gewoonlijk een seculaire term. Aangezien we verondersteld hebben dat $x(t)$, en dus ook $x_1(t)$, periodiek is, is de enige conclusie dat

$$(\omega^2 - 1)a - \frac{3}{4} \varepsilon a^3 + g = 0$$

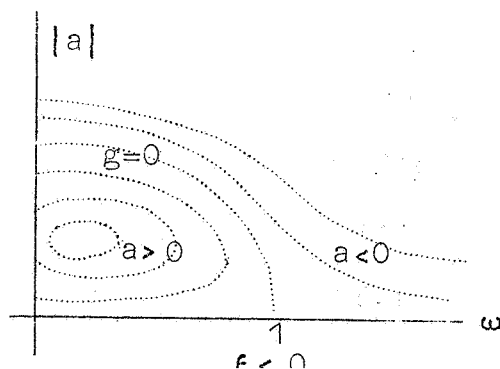
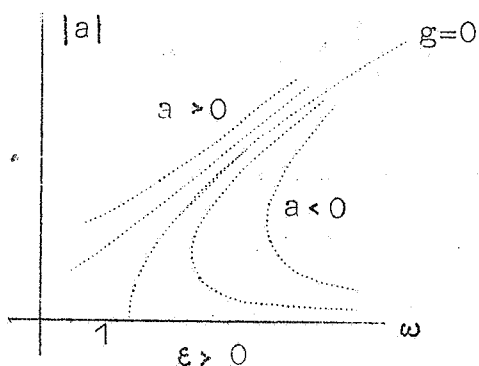
d.i. dezelfde betrekking als (7.9).

Voor x_1 vinden we nu echter

$$(7.12) \quad x_1 = a \cos \omega t + \frac{1}{32 \omega^2} \varepsilon a^3 \cos 3 \omega t.$$

Discussie van het functionele verband tussen a en ω .

De betrekking (7.9) bepaalt a als functie van ω . Hoewel dit voor ons probleem enigszins vreemd aandoet kunnen we beter ω als functie van a beschouwen. Gemakshalve zullen we g positief veronderstellen.



De takken met $a < 0$ corresponderen met de responsies die in phase tegengesteld zijn met de uitwendige kracht; de takken met $a > 0$ corresponderen met de responsies die dezelfde phase hebben als de uitwendige kracht.

We onderscheiden de gevallen $\varepsilon > 0$ en $\varepsilon < 0$. In het eerste geval zijn vergeleken met de lineaire resonantie ($\varepsilon = 0$) (zie fig.2.5) de responsiekrommen naar rechts ongebogen, in het tweede geval naar links. Inderdaad was het verstandig ω als functie van a te beschouwen, want de functie $a(\omega)$ blijkt meerwaardig te zijn.

We kunnen op voor de hand liggende wijze volgende iteratiestappen uitvoeren. Doch daar deze geen nieuwe facetten aan het reeds verkregen beeld toevoegen laten we verderé iteratie achterwege.

Invloed van visceuse wrijving

We nemen aan dat er een (geringe) wrijving is met wrijvingscoëfficiënt λ d.w.z. we beschouwen de volledige vergelijking (7.1). De verwachting is nu gewettigd dat de periodieke oplossing en de opgedrongen kracht niet meer in fase zijn zodat als eerste benadering eerder iets als $a \cos(\omega t + \varphi)$ in aanmerking komt. Eigenlijk hetzelfde maar iets handiger is het om de eerste benadering (7.4) aan te houden maar om het rechterlid van (7.1) a.v. te wijzigen

$$(7.13) \quad \ddot{x} + \lambda \dot{x} + (x + \varepsilon x^3) = g \cos(\omega t + \varphi)$$

met nader te bepalen fase φ .

Als bij (7.11) vinden we x_1 uit

$$(7.14) \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left\{ (\omega^2 - 1)a - \frac{3}{4} \varepsilon a^3 + g \cos \varphi \right\} \cos \omega t + \\ + \left\{ \lambda a \omega - g \sin \varphi \right\} \sin \omega t - \frac{1}{4} \varepsilon a^3 \cos 3\omega t.$$

Eliminatie van de seculaire termen geeft

$$(7.15) \quad \begin{cases} (1 - \omega^2)a + \frac{3}{4} \varepsilon a^3 = g \cos \varphi, \\ \lambda \omega a = g \sin \varphi, \end{cases}$$

en dus

$$(7.16) \quad \left\{ (1 - \omega^2)a + \frac{3}{4} \varepsilon a^3 \right\}^2 + \lambda^2 \omega^2 a^2 = g^2.$$

Beschouwen we bijv. het geval $\varepsilon > 0$ dan wordt het volgende responsieplaatje verkregen

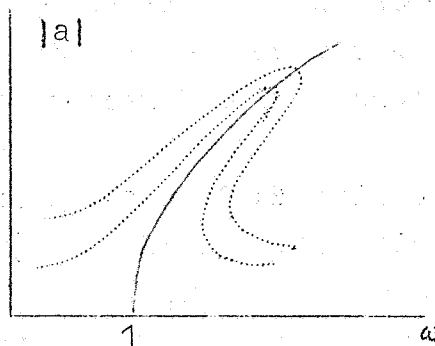


fig.7.2

I.h.a. is dus $|a|$ als functie van ω een driewaardige (!) functie. We stellen ons nu een experiment voor waarbij van de uitwendige kracht g vast is en ω varieert.

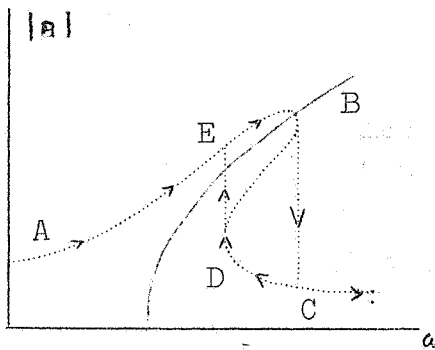


fig.7.3

Beginnen we met ω klein dan doorlopen we de responsiekurve van A tot B. Verdere verhoging van ω doet $|a|$ discontinu verlagen tot C waarna de responsiekurve verder vervolgd wordt. Gaan we terug dan doorlopen we de kurve van C tot D waarna we sprongsgewijze verder gaan met E tot A.

§ 8. De methode van Krylov en Bogolyubov

Inleiding

In de paragrafen 6 en 7 hebben we ons bezig gehouden met twee niet-lineaire differentiaalvergelijkingen nml. die van Van der Pol, corresponderend met een electronische generator, en met die van Duffing, corresponderend met een visceus gedempte slinger met een niet-lineaire terugdrijvende kracht, waarop een periodieke uitwendige kracht wordt uitgeoefend.

In deze paragraaf zullen we een benaderingsoplossing geven van differentiaalvergelijkingen van het type

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0$$

of

$$(8.1) \quad \ddot{x} + \nu^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0,$$

waarin ε een kleine parameter is.

Volgens een methode, ontwikkeld door Krylov en Bogolyubov in ca 1932, is het mogelijk de oplossing van (8.1) te geven in de gedaante van een asymptotische reeks in ε ; de eerste term of de eerste twee termen van deze reeks zijn in de praktijk meestal wel voldoende voor een adequate beschrijving van het met de differentiaalvergelijking corresponderende systeem.

Wij zullen ons hier bezig houden met de bepaling van een eerste benadering voor de oplossingen van (8.1), die meer geeft dan de eerste term maar minder dan de eerste twee termen van bovengenoemde asymptotische ontwikkeling. De methode, waarop dit geschiedt heet de P.K.B-methode (Van der Pol, Krylov, Bogolyubov).

We zullen eerst nog enige voorbeelden geven van systemen, die door de differentiaalvergelijking (8.1) beschreven worden.

1. Samengestelde draaiende as met niet lineaire elastische verbinding.



fig.8.1

Stel de traagheidsmomenten der afzonderlijke delen J_1 resp. J_2 , de rotaties θ_1 en θ_2 , en het draaimoment van de elastische verbinding $\varphi(\theta)$.

Voor het éne deel geldt de diff.vgl. $J_1 \ddot{\theta}_1 + \varphi(\theta_1 - \theta_2) = 0$.

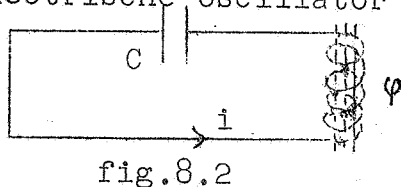
Voor het andere deel geldt de diff.vgl. $J_2 \ddot{\theta}_2 - \varphi(\theta_1 - \theta_2) = 0$.

Voor $\theta = \theta_1 - \theta_2$ geldt bijgevolg de diff.vgl.

$$(8.2) \quad \ddot{\theta} + \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \varphi(\theta) = 0.$$

$\varphi(\theta)$ is afhankelijk van de aard van de elastische verbinding en is doorgaans graphisch gegeven als een niet lineaire functie van θ . De niet lineaire term van $\varphi(\theta)$ is $O(\varepsilon)$, waarin ε een klein getal is.

2. Electriscche oscillator bestaande uit condensator en spoel.



i stroomsterkte
 C capaciteit
 φ magnetische flux

Voor de magnetische flux en de stroomsterkte geldt: $\dot{\varphi} + \frac{1}{C} \int i \, dt = 0$. De stroomsterkte is verder een functie van de magnetische flux, welke functie door de aard van de spoel gegeven is.

Stel $i = A\varphi + B\varphi^3$ (niet lineaire benadering voor $i = i(\varphi)$). Dus voor φ geldt de diff.vgl.:

$$(8.3) \quad \ddot{\varphi} + \frac{A\varphi + B\varphi^3}{C} = 0.$$

De voorbeelden 1 en 2 zijn voorbeelden van conservatieve systemen, waarin dus geen creatie of dissipatie van energie optreedt.

We hebben in de voorafgaande paragrafen al enkele voorbeelden ontmoet van dissipatieve systemen. Bij mechanische systemen treedt dissipatie van energie op t.g.v. wrijving. Hierbij onderscheiden we drie soorten van wrijving:

- a. wrijvingskracht $\propto$ snelheid (trillingen in lucht)
- b. wrijvingskracht $\propto$ snelheid in het kwadraat (trillingen in vloeistof)
- c. droge wrijving (Coulomb-wrijving)

De wrijvingskracht is constant maar zijn richting is tegengesteld aan de snelheid.

Volledigheidshalve vermelden we hier nog de volgende voorbeelden

3. slinger in lucht

$$(8.4) \quad \ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

4. vergelijking van Duffing (zie § 7)

$$(8.5) \quad \ddot{x} + \lambda \dot{x} + (x + \varepsilon x^3) = 0.$$

5. vergelijking van Van der Pol (zie § 6)

$$(8.6) \quad \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

De P.K.B. methode

We beschouwen een systeem, dat beschreven wordt door een differentiaalvergelijking (8.1).

Voor $\varepsilon=0$ is de oplossing

$$(8.7) \quad x = x_0(t) = a \sin(\nu t + \varphi)$$

met constante amplitude a en fase φ .

Men zou nu het bekende principe van de storingsrekening willen toepassen en volgens Poisson de algemene oplossing van (8.1) voorstellen door de asymptotische reeks

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Substitutie van deze reeks in (8.1) en gelijkstelling van gelijknamige machten van ε levert in het algemeen voor $x_1(t)$ seculiere termen:

$$t \sin(\nu t + \varphi) \text{ en } t \cos(\nu t + \varphi)$$

en deze zijn voor grote waarden van t onbruikbaar (verg. § 7).

We moeten dus trachten een oplossing te vinden, die vrij is van seculiere termen. We handelen daartoe als volgt.

Voor $\varepsilon=0$ volgt uit (8.7)

$$(8.8) \quad \frac{dx}{dt} = \nu a \cos(\nu t + \varphi).$$

Gebruikmakend van de gedachte dat voor kleine ε de oplossing $x(t)$ van (8.1) niet veel van (8.7) zal verschillen stellen we de algemene voorstelling eveneens door (8.7) voor maar waarbij we nu a en φ als zekere nader te bepalen functies van t beschouwen (principe van de variatie van de constanten). Omdat we in feite twee nieuwe functies $a(t)$ en $\varphi(t)$ hebben ingevoerd, kunnen we nog een voorwaarde willekeurig opleggen. We stellen daartoe dat voor de algemene oplossing ook (8.8) geldt.

Hieruit volgt

$$(8.9) \quad \frac{da}{dt} \sin(\nu t + \varphi) + a \frac{d\varphi}{dt} \cos(\nu t + \varphi) = 0.$$

Differentiatie van (8.8) naar de tijd levert:

$$(8.10) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{da}{dt} \nu \cos(\nu t + \varphi) - a \nu \frac{d\varphi}{dt} \sin(\nu t + \varphi) - a \nu^2 \sin(\nu t + \varphi).$$

Substitutie van (8.7), (8.8) en (8.10) in (8.1) geeft een tweede vergelijking voor de onbekenden $a(t)$ en $\varphi(t)$ nml.:

$$(8.11) \quad \nu \frac{da}{dt} \cos(\nu t + \varphi) - \nu a \frac{d\varphi}{dt} \sin(\nu t + \varphi) = -\varepsilon f(a \sin(\nu t + \varphi), \nu a \cos(\nu t + \varphi)).$$

Het stelsel (8.9) en (8.11) kunnen we herleiden tot

$$(8.12) \quad \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\nu} f\{a \sin(\nu t + \varphi), a \nu \cos(\nu t + \varphi)\} \cos(\nu t + \varphi),$$

$$(8.13) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{a\nu} f\{a \sin(\nu t + \varphi), a \nu \cos(\nu t + \varphi)\} \sin(\nu t + \varphi).$$

We ontwikkelen nu $f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ in Fourierreeksen nml.:

$$(8.14) \quad \begin{aligned} f(a \sin \varphi, \nu a \cos \varphi) \cos \varphi &= K_0(a) + \sum_{n>0} \{K_n(a) \cos n\varphi + L_n(a) \sin n\varphi\} \\ f(a \sin \varphi, \nu a \cos \varphi) \sin \varphi &= P_0(a) + \sum_{n>0} \{P_n(a) \cos n\varphi + Q_n(a) \sin n\varphi\} \end{aligned}$$

Substitutie van (8.14) in (8.12) en (8.13) en integratie over één periode T levert

$$(8.15) \quad \begin{cases} \frac{a(T+t) - a(t)}{T} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0\{a(t)\}, \\ \frac{\varphi(T+t) - \varphi(t)}{T} = \frac{\varepsilon}{a\nu} P_0\{a(t)\}. \end{cases}$$

Omdat $\frac{da}{dt}$ en $\frac{d\varphi}{dt}$ de orde $O(\varepsilon)$ hebben, veranderen a en φ slechts weinig gedurende een periode en daarom mogen we de linkerleden van (8.15) wel door $\frac{da}{dt}$ en $\frac{d\varphi}{dt}$ vervangen.

We krijgen dan tenslotte voor a en φ de (benaderde) differentiaalvergelijkingen:

$$(8.16) \quad \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0(a),$$

en

$$(8.17) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{a\nu} P_0(a),$$

met

$$(8.18) \quad K_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi,$$

en

$$(8.19) \quad P_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi.$$

Men kan (8.16) en (8.17) beschouwen als het gemiddelde van de rechterleden van (8.12) en (8.13) over één periode (principe van het gemiddelde).

Oplossing van (8.16) en (8.17) levert tenslotte de gevraagde $a(t)$ en $\varphi(t)$.

Stellen we $\psi = \nu t + \varphi$, dan kunnen we (8.18) en (8.19) eventueel schrijven in de vorm

$$(8.20) \quad \begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) d \sin \varphi, \\ \dot{\psi} = \nu - \frac{\varepsilon}{2\pi a\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) d \cos \varphi. \end{cases}$$

Toepassing op conservatieve systemen

In het geval van een conservatief systeem is de functie F onafhankelijk van $\dot{x}$. De vergelijking (8.1) gaat over in

$$\ddot{x} + F(x) = 0$$

of

$$\dot{x} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) = 0.$$

Uit (8.18) volgt

$$K_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = 0$$

zodat

$$(8.21) \quad \frac{da}{dt} = 0.$$

Uit (8.17) en (8.19) volgt

$$(8.22) \quad \frac{d\psi}{dt} = \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi\nu a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Uit (8.21) volgt dat de amplitude van de trilling constant is. De amplitude wordt bepaald door de begincondities en kan afhankelijk van deze condities iedere willekeurige vaste waarde aannemen. $\frac{d\psi}{dt}$ is nu onafhankelijk van t , maar bevat de amplitude als een parameter.

Schrijven we $x = a \sin \{\omega(a)t + \theta\}$ dan geldt voor de frequentie $\omega(a)$:

$$(8.23) \quad \omega(a) = \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi\nu a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

of

$$(8.24) \quad \omega^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

(8.24) heeft een zeker voordeel boven (8.23) omdat $\omega^2(a)$ direct wordt uitgedrukt in $F(x)$ terwijl in (8.23) $\omega(a)$ wordt uitgedrukt in het niet lineaire deel van $F(x)$.

Voorbeelden

1. Samengestelde draaiende as met niet-lineaire elastische verbinding.

De functie F heeft volgens (3.2) de gedaante $\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \varphi(\theta)$

en dus is de amplitude constant; deze is bepaald door de begincondities.

Volgens (8.24) geldt voor de frequentie:

$$\omega^2(a) = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

Voor $\varphi(\theta)$ nemen we de functie:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} h + k\theta & \theta > 0, \\ -h + k\theta & \theta < 0. \end{cases}$$

h en k zijn constanten.

Aangezien

$$\int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = 4h + \pi k a$$

geldt

$$\omega^2(a) = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} k \left(1 + \frac{4h}{\pi a k} \right).$$

Deze formule is alleen geldig voor voldoende kleine waarden van $\frac{h}{ak}$, hetgeen in zekere zin een maat is voor de niet-lineariteit van $\varphi(\theta)$.

2. De wrijvingsloze slinger

De differentiaalvergelijking voor de uitwijking is bij benadering

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = 0.$$

De amplitude is constant en is bepaald door de begincondities en kan in principe alle waarden aannemen.

Uit (8.24) volgt

$$\omega^2(a) = \frac{g}{l} \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left\{ a \sin \varphi - \frac{a^3 \sin^3 \varphi}{6} \right\} \sin \varphi \, d\varphi,$$

dus

$$\omega^2(a) = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{a^2}{8} \right).$$

Als dus de amplitude toeneemt dan neemt de frequentie af en omgekeerd. (Dit in afwijking van het lineaire geval.)

Voor de trillingstijd geldt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{a^2}{16} \right).$$

Voor $a=30^\circ$ vinden we in het bijzonder

$$T = 1.017 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

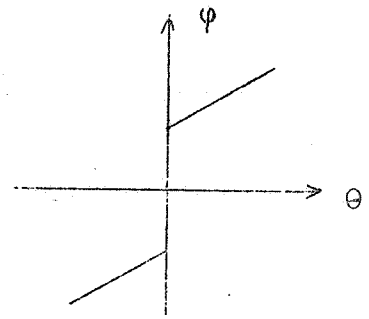


fig.8.3

3. Opgave: Behandel de elektrische oscillator bestaande uit condensator en spoel (vb.2 uit inleiding).

(Oplossing

$$\omega(a) = \sqrt{\frac{A}{C}} \left(1 + 3 \frac{Ba^2}{8A}\right).$$

4. De vergelijking van Van der Pol

Uit

$$\ddot{x} + x - \epsilon(1-x^2)\dot{x} = 0$$

volgt in de schrijfwijze van (8.1)

$$\nu = 1 \text{ en } f(x, \frac{dx}{dt}) = -(1-x^2)\dot{x}.$$

Aangezien

$$f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) = -a(1-a^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi = a\left(\frac{a^2}{4} - 1\right) \cos \varphi - \frac{a^3}{4} \cos 3\varphi,$$

volgt uit (8.18) en (8.19)

$$K_0(a) = -\frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \quad P_0(a) = 0.$$

Derhalve is

$$(8.25) \quad \dot{a} = + \frac{\epsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \text{ en } \dot{\psi} = 1.$$

De oplossing van de vergelijking van Van der Pol is in eerste benadering dus $x = a(t) \sin(t + \psi_0)$, waarin ψ_0 uit de begincondities bepaald wordt en $a(t)$ verkregen wordt door integratie van (8.25).

Gemakkelijk vindt men

$$(8.26) \quad a = \frac{a_0 \exp(\frac{1}{2} \epsilon t)}{\sqrt{1 + 1/4 a_0^2 \{ \exp(\epsilon t) - 1 \}}}$$

waarin a_0 weer uit de begincondities bepaald wordt.

De triviale oplossing $x=0$ van de vgl. van Van der Pol is onstabiel. Immers een willekeurig kleine beginamplitude a_0 groeit monotoon in de tijd tot de limietwaarde $a=2$ voor $t \rightarrow \infty$.

Zoals reeds in § 6 beschreven is brengt ook de kleinste verstoring het systeem in trilling met aangroeiende amplitude (zie fig.6.1).

Indien $a_0=2$ dan is volgens (8.26) $a=2$ voor alle waarden van t .

Dit correspondeert met de stationnaire trilling:

$$x = 2 \sin(t + \psi_0).$$

Deze stationnaire trilling is stabiel, want wat a_0 ook moge zijn, groot of klein, $a(t)$ nadert altijd tot 2 voor $t \rightarrow \infty$. Hier wordt het

verschil met een conservatief systeem duidelijk gedemonstreerd, waarbij de amplitude constant is en in principe iedere willekeurige waarde kan aannemen (afhankelijk van de beginvoorwaarden).

Bij een conservatief systeem wordt geen energie gecreëerd of gedissipeerd en er is dus geen reden waarom de amplitude zou uitsterven of groeien. In een zich zelf-exciterend systeem wordt evenwel beurtelings energie gecreëerd en gedissipeerd en de amplitude zal toenemen als energie gecreëerd wordt en zal afnemen als energie gedissipeerd wordt. Er zal op den duur een bepaalde vaste amplitude optreden als de twee processen elkaar compenseren, hetgeen bij de electronische generator van Van der Pol het geval is.

Stabiliteit van de stationnaire trillingen

De oplossing van (8.1) zij

$$(8.27) \quad x = a \sin \psi$$

met

$$(8.28) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= \Phi(a), \\ \dot{\psi} &= \omega(a). \end{aligned}$$

Volgens (8.18) en (8.19) geldt

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi, \\ \text{en} \quad \omega(a) &= \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi\nu a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Met behulp van $F(x, \dot{x}) = \nu^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x})$ kunnen we dit ook schrijven als

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= -\frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi, \\ \text{en} \quad \omega^2(a) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Het is duidelijk, dat er geen a^* bestaat zodanig dat $\Phi(a) > 0$ voor $a > a^*$; immers als dit waar zou zijn dan zou voor een beginamplitude $a_0 > a^*$ de amplitude van de trilling monotoon stijgen bij toenemende tijd, hetgeen fysisch niet mogelijk is. De nulpunten van $\Phi(a)$ geven de amplitude van de stationnaire trillingen en we zullen nu de stabiliteit van deze stationnaire trillingen onderzoeken.

a_1 zij een nulpunt van $\Phi(a)$ en δa zij een kleine afwijking van a_1 . Volgens (8.28) geldt

$$\frac{d\delta a}{dt} = \Phi(a_1 + \delta a) = \frac{\Phi(a_1 + \delta a) - \Phi(a_1)}{\delta a} \delta a = \Phi'(a_1) \delta a.$$

Dus a_1 is stabiel als $\Phi'(a_1) < 0$ en a_1 is instabiel als $\Phi'(a_1) > 0$.

De situatie wordt geïllustreerd door fig.8.4.

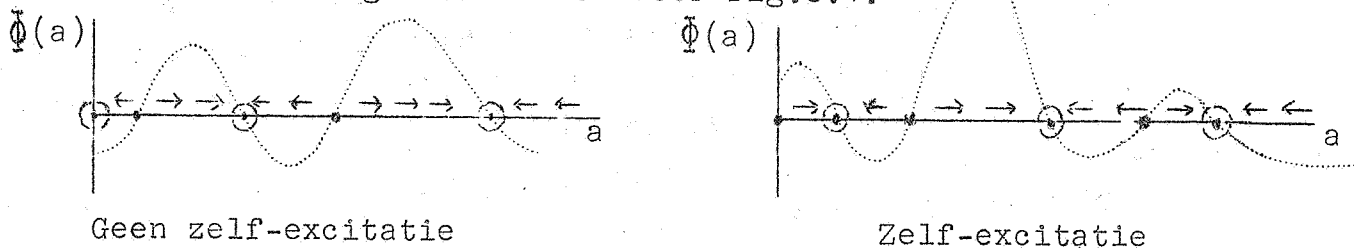


fig.8.4

Het is duidelijk, dat het criterium voor zelfexcitatie luidt:

$$(8.29) \quad \Phi(0) > 0.$$

Isochrone trillingen

We hebben gezien dat de frequentie $\frac{d\psi}{dt} = \omega(a)$ en dus ook de trillings-tijd $T=T(a)$ in het algemeen functies van de amplitude zijn.

Voorbeelden hiervan zijn de samengestelde draaiende as, de wrijvings-loze slinger, de elektrische oscillator bestaande uit capaciteit en spoel e.d.

In belangrijke praktijkgevallen kan de frequentie onafhankelijk van de amplitude zijn; in een dergelijk geval noemen we de trilling isochroon. Een voorbeeld hiervan krijgen we als geldt:

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu = \text{constant}.$$

Volgens (8.19) en (8.20) geldt dan:

$$P_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \equiv 0.$$

Dit zal het geval zijn als $f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi)$ ontaardt in functies van de gedaante

$$a. f = \{f(a \sin \varphi)\} a\nu \cos \varphi$$

en

$$b. f = f(a\nu \cos \varphi).$$

Dit betekent dat de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (8.1) van het type wordt:

$$a) \ddot{x} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) \dot{x} = 0$$

en

$$b) \ddot{x} + \nu^2 x + \varepsilon g(\dot{x}) = 0.$$

De laatste vergelijking kan in de voorlaatste overgevoerd worden

m.b.v. de substitutie $\frac{dx}{dt} = y$.

Een voorbeeld van isochrone trillingen wordt gegeven door de oplossingen van de Van der Pol vergelijking.

De P.K.B. methode is uiteraard een (geraffineerd) benaderingsproces. Het proces kan met alle mathematische strengheid worden uitgebreid door ook hogere benaderingen voor de oplossingen van de differentiaalvergelijking (8.1) te beschouwen.

Dit geschiedt door de oplossing van (8.1) in een asymptotische reeks naar machten van ε te ontwikkelen.

De geïnteresseerde lezer zij hiervoor verwezen naar lit.1.

§ 9. De vergelijking van Hill

In § 7 hebben we een studie gemaakt van de slinger met een niet lineaire terugdrijvende kracht, waarop een periodieke uitwendige kracht $g \cos \omega t$ wordt uitgeoefend. Indien we de visceuse wrijving niet in aanmerking nemen (slinger in vacuum), dan wordt de beweging beschreven door de vergelijking van Duffing zonder wrijvingsterm, nml.:

$$(9.1) \quad \ddot{x} + (x + \varepsilon x^3) = g \cos \omega t,$$

waarin ε een kleine parameter is.

De harmonische oplossing van (9.1) met dezelfde frequentie als de opgedrukte kracht wordt gegeven door

$$(9.2) \quad x = a \cos \omega t,$$

waarin de amplitude a bepaald wordt door de vergelijking (7.9) van de responsie-kromme:

$$(9.3) \quad \omega^2 = 1 + 3/4 \varepsilon a^2 - \frac{g}{a}.$$

We brengen op tijdstip t_0 een kleine verstoring δx aan in de harmonische oplossing (9.2). Verwaarlozen we termen van de orde $(\delta x)^2$ en hoger dan voldoet δx aan de differentiaalvergelijking:

$$(9.4) \quad \delta \ddot{x} + (1 + 3\varepsilon x^2) \delta x = 0.$$

M.b.v. $x = a \cos \omega t$ krijgen we:

$$(9.5) \quad \delta \ddot{x} + \left\{ (1 + 3/2 \varepsilon a^2) + 3/2 \varepsilon a^2 \cos 2\omega t \right\} \delta x = 0$$

waarbij δx nog voldoet aan zekere begincondities, bijv.:

$$\delta x(t_0) = \delta_1 \text{ en } \delta \dot{x}(t_0) = \delta_2, \text{ waarin } \delta_1 \text{ en } \delta_2 \text{ klein zijn.}$$

Het is duidelijk, dat de harmonische resonantie oplossing $x = a \cos \omega t$ niet noemenswaard verstoord wordt, als alle oplossingen van (9.5) begrensd zijn, immers (9.5) is homogeen en δ_1 en δ_2 zijn klein. We noemen daarom de oplossing $x = a \cos \omega t$ van de vergelijking van Duffing stabiel, als alle oplossingen δx van (9.5) begrensd zijn voor alle waarden van t . We drukken dit kortweg uit door te zeggen, dat in dit geval (9.5) stabiele oplossingen heeft; zijn niet alle oplossingen van (9.5) voor alle waarden van t begrensd, dan is $x = a \cos \omega t$ niet stabiel en we zeggen dat de diff.vgl. (9.5) onstabiele oplossingen heeft.

Indien we willen nagaan of de resonantie oplossing $x=a \cos \omega t$ al dan niet stabiel is, dan moeten we onderzoeken voor welke waarden van a en ω de differentiaalvergelijking (9.5) voor alle waarden van t begrensde al dan niet-begrensde oplossingen heeft. De vgl. (9.5) is niets anders dan de bekende diff.vgl. van Mathieu en deze is een bijzonder geval ^{VAN DE} uit de hemelmechanica bekende vgl. van Hill, nml.:

$$(9.6) \quad \frac{d^2 w}{dz^2} + q(z)w = 0,$$

waarin $q(z)$ een functie is, die regulier is in een horizontale strook $|\operatorname{Im} z| < c$ van het complexe z -vlak en die periodiek is met reële periode Ω .

Een aardig mechanisch probleem, dat direct tot de vgl. van Hill voert, is dat van de geïnverteerde slinger.

De slinger bestaat uit een lichte stijve staaf met verwaarloosbare massa; aan het bovenende bevindt zich een massa m , terwijl het benedeneinde van de staaf langs een verticale lijn op en neer bewogen kan worden. De staaf kan verder om z'n benedeneinde in een verticaal vlak draaien (zie fig.9.1).

We brengen nu een met de tijd veranderende kracht $Y(t)$ aan, die aan het benedeneinde van de staaf aangrijpt, zodat dit benedeneinde langs de verticale lijn op en neer bewogen wordt.

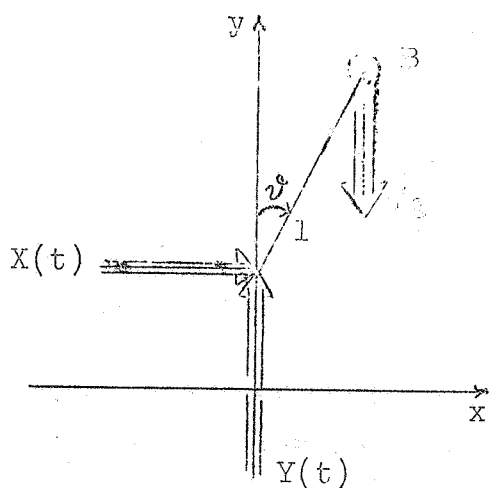


fig.9.1

De beweging van het massapunt B vindt plaats in het x - y vlak onder invloed van de zwaartekracht mg , de uitwendige kracht $Y(t)$ en de reactiekracht $X(t)$ veroorzaakt doordat het benedeneinde van de staaf (met lengte l) alleen langs de y -as op en neer kan bewegen. De x coördinaat van het massapunt B is gegeven door

$$x = l \sin \psi.$$

De beweging van B wordt beschreven door de differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X, \\ Yl \sin \psi - Xl \cos \psi &= 0 \quad (\text{traagheidsmoment van het systeem} \\ &\quad \text{t.o.v. B is gelijk aan nul}). \end{aligned}$$

Voor kleine waarden van $\dot{v}$ vinden we:

$$\begin{cases} ml \ddot{v} = X, \\ Y \dot{v} = X. \end{cases}$$

Dus $\dot{v}$ voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$ml \ddot{v} - Y \dot{v} = 0.$$

Stel $Y(t) = mg - mp(t)$, dan vinden we voor $\dot{v}$ de vergelijking:

$$(9.7) \quad \ddot{v} + \left\{ -\frac{g}{l} + \frac{1}{l} p(t) \right\} \dot{v} = 0.$$

Als $Y(t)$ periodiek is, dan is (9.7) weer een diff.vgl. van Hill.

Indien we $p(t) = A \cos \omega t$ nemen, dan zijn er waarden van A en ω zodanig dat alle oplossingen van (9.7) voor alle waarden van t begrensd zijn en de beweging is dan stabiel. Er zijn ook waarden voor A en ω waarvoor de oplossingen van (9.7) niet voor alle waarden van t eindig blijven, de beweging is dan labiel (bijv. $A=0$).

Indien we in (9.7) g van teken omkeren, dan hebben we het probleem voor de gewone slinger, die aan z'n bovencinde op en neer bewogen wordt. Er zijn dan weer waarden van A en ω waarvoor de slingering stabiel of labiel wordt. (Voor $A=0$, stabiele beweging.)

Een ééenvoudig electrisch-mechanisch systeem, dat tot de vergelijking van Hill voert, wordt gevormd door een spoel met zelfinductie L en een condensator, waarvan de platen periodiek naar elkaar toe en van elkaar af geschoven worden.

De capaciteit van de condensator wordt dan een periodieke functie $C(t)$ van de tijd t en de differentiaalvergelijking voor de lading q op de condensator wordt dan:

$$(9.8) \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C(t)} = 0.$$

De vergelijking van Hill

Voor het onderzoek naar de stabiliteit is het nodig, dat we de begrensde oplossingen van de vergelijking van Hill (9.6) opsporen.

De vergelijking van Hill is

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + q(z)w = 0.$$

We veronderstellen dat de periode van $q(z)$ gelijk aan Ω is; dus

$$q(z + \Omega) = q(z).$$

$w_1(z)$ en $w_2(z)$ zijn een stelsel van twee onafhankelijke oplossingen van (9.6). Noodzakelijk en voldoende voorwaarde hiervoor is, dat de Wronskideterminant $\Delta(z)$ niet identiek nul is.

Dus

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Uit de differentiaalvergelijking (9.6) volgt nu

$$\frac{d \Delta(z)}{dz} = \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1''(z) & w_2''(z) \end{vmatrix} = -q(z) \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Bijgevolg is $\Delta(z)$ een constante.

Kiezen we voor het fundamenteelstelsel w_1, w_2 oplossingen met de begincondities:

$$\begin{cases} w_1(0) = 1 \\ w_1'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} w_2(0) = 0 \\ w_2'(0) = 1, \end{cases}$$

dan is de Wronski determinant $\Delta(z)$ identiek gelijk aan 1.

Omdat $q(z)$ de periode Ω heeft, zijn $w_1(z+\Omega)$ en $w_2(z+\Omega)$ ook oplossingen van de differentiaalvergelijking.

$w_1(z+\Omega)$ en $w_2(z+\Omega)$ kunnen we dus schrijven als:

$$(9.9) \quad \begin{cases} w_1(z+\Omega) = a_{11}w_1(z) + a_{12}w_2(z) \\ w_2(z+\Omega) = a_{21}w_1(z) + a_{22}w_2(z). \end{cases}$$

Verder geldt:

$$\Delta(z+\Omega) = \begin{vmatrix} w_1(z+\Omega) & w_2(z+\Omega) \\ w_1'(z+\Omega) & w_2'(z+\Omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Delta(z)$$

Aangezien $\Delta(z) \equiv \Delta(z+\Omega) \equiv 1$ is moet dus gelden

$$(9.10) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1.$$

Volgens Floquet bezit de differentiaalvergelijking (9.6) quasi-periodieke oplossingen, d.w.z. oplossingen $w(z)$ waarvoor geldt

$$(9.11) \quad w(z+\Omega) = \sigma w(z),$$

waarin σ één of andere reële of complexe constante voorstelt.

Is $w(z)$ een zodanige oplossing dan kan deze geschreven worden als een geschikte lineaire combinatie van w_1 en w_2 nml.:

$$w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2.$$

De relatie (9.11) betekent

$$\lambda_1 w_1(z + \Omega) + \lambda_2 w_2(z + \Omega) = (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21}) w_1(z) +$$

$$(\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22}) w_2(z) = \sigma \lambda_1 w_1(z) + \sigma \lambda_2 w_2(z),$$

zodat

$$\{\lambda_1(a_{11} - \sigma) + \lambda_2 a_{21}\} w_1(z) + \{\lambda_1 a_{12} + \lambda_2(a_{22} - \sigma)\} w_2(z) = 0.$$

Omdat w_1 en w_2 lineair onafhankelijk zijn geldt:

$$\begin{cases} \lambda_1(a_{11} - \sigma) + \lambda_2 a_{21} = 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2(a_{22} - \sigma) = 0, \end{cases}$$

en bijgevolg geldt voor σ de volgende zgn. karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Gebruikmakend van (9.10) kunnen we hiervoor schrijven

$$(9.12) \quad \sigma^2 - (a_{11} + a_{22})\sigma + 1 = 0^*.$$

Voor de wortels σ_1 en σ_2 van deze vergelijking geldt dat hun product $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ is. We onderscheiden nu de twee gevallen dat de wortels σ_1 en σ_2 verschillend zijn en dat ze samenvallen.

a) $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Er zijn twee lineair onafhankelijke quasi-periodieke oplossingen $w_1(z)$, waarvoor we in verband met (9.11) mogen schrijven:

$$(9.13) \quad \begin{cases} w_1(z) = e^{(\ln \sigma_1) \frac{z}{\Omega}} \varphi_1(z) \\ w_2(z) = e^{(\ln \sigma_2) \frac{z}{\Omega}} \varphi_2(z), \end{cases}$$

waarin φ_1 en φ_2 dezelfde periode als $q(z)$ bezitten.

Noodzakelijk en voldoende voor de begrensdsheid van de beide oplossingen is dat $|\sigma_1| = |\sigma_2| = 1$. ($|\sigma_1| < 1$ is onmogelijk, omdat dan $|\sigma_2| > 1$ is.) Deze twee quasi-periodieke oplossingen mogen we gebruiken als de fundamentealoplossingen en in het geval $\sigma_1 \neq \sigma_2$ zijn dus alle oplossingen van de vgl. van Hill (9.6) begrensd, dan en alleen dan als $|\sigma_1| = |\sigma_2| = 1$ is.

* Het kan gemakkelijk aangetoond worden, dat de karakteristieke vergelijking niet verandert als we een ander stelsel fundamenteel op-

b) $\sigma_1 = \sigma_2$

Uit $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ volgt dat $\sigma = \pm 1$.

De quasi periodieke oplossing $w(z)$ met $w(z+\Omega) = \sigma w(z)$ is dus nu zuiver periodiek geworden en wel met periode Ω als $\sigma=1$ en met periode 2Ω als $\sigma=-1$ is.

Deze periodieke oplossing noemen we $w_1(z)$ en we nemen als fundamenteel stelsel $w_1(z)$ en een van $w_1(z)$ onafhankelijke oplossing $w_2(z)$. Analogc aan (9.9) kunnen we schrijven:

$$(9.14) \quad \begin{cases} w_1(z+\Omega) = \sigma w_1(z), \\ w_2(z+\Omega) = a w_1(z) + b w_2(z). \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking wordt dus

$$(\sigma - \sigma^*)(b - \sigma^*) = 0.$$

Omdat $\sigma^* = \sigma$ een dubbele wortel van de karakteristieke vgl. is, moet noodzakelijkerwijs gelden $b = \sigma$.

Uit (9.14) volgt dus:

$$\frac{w_2(z+\Omega)}{w_1(z+\Omega)} = \frac{w_2(z)}{w_1(z)} + \frac{a}{\sigma}.$$

Derhalve heeft de functie

$$\psi(z) \equiv \frac{w_2(z)}{w_1(z)} - \frac{a}{\sigma} \frac{z}{\Omega}$$

de periode Ω en we kunnen schrijven

$$(9.15) \quad w_2(z) = w_1(z) \left[\frac{a}{\sigma} \frac{z}{\Omega} + \psi(z) \right].$$

Voor $\sigma=1$ heeft de differentiaalvergelijking de lineaire onafhankelijke oplossingen:

$$(9.16) \quad \begin{cases} w_1(z) = \varphi(z), \\ w_2(z) = \left[\frac{z}{\Omega} + \psi(z) \right] \varphi(z) \end{cases}$$

waarin φ en ψ de periode Ω bezitten.

Voor $\sigma=-1$ zijn de lineair onafhankelijke oplossingen:

$$(9.17) \quad \begin{cases} w_1(z) = \varphi^*(z) \\ w_2(z) = \left[-a \frac{z}{\Omega} + \psi(z) \right] \varphi^*(z) \end{cases}$$

waarin $\varphi^*(z)$ nu de periode 2Ω en $\psi(z)$ de periode Ω heeft.

Deze oplossingen (9.16) en (9.17) kunnen we weer nemen als fundamenteelstelsel en we zien, dat er oplossingen van de differentiaalvergelijkingen zijn, die niet voor alle waarden van z begrensd zijn.

Resumerend: Voor complexe waarden van de wortels σ_1 geldt, dat deze waarden elkaars toegevoegden zijn en omdat $\sigma_1 \sigma_2 = 1$, is de absolute waarde van σ_1 gelijk aan 1. In dit geval zijn alle oplossingen van de diff.vgl. van Hill begrensd.

Voor reële verschillende waarden van de wortels σ_1 geldt $|\sigma_1| > 1$ en $|\sigma_2| < 1$ en niet alle oplossingen van de vgl. van Hill zijn begrensd.

Voor reële samenvallende wortels σ_1 geldt $\sigma = \pm 1$ en alle oplossingen zijn evenmin begrensd.

Het geval van samenvallende wortels $\sigma = \pm 1$ vormt de overgang van stabiliteit (begrensdheid) naar onstabiliteit (onbegrensdheid) van de oplossingen van de differentiaalvergelijking van Hill.

Toepassing op de differentiaalvergelijking van Mathieu

Omdat het onderzoek van de stabiliteit van de resonantie-oplossingen van de vergelijking van Duffing tot de Mathieu vergelijking voert, gaan we bovenstaande theorie nu toepassen op de differentiaalvergelijking van Mathieu.

Deze differentiaalvergelijking schrijven we in de vorm:

$$(9.18) \quad \frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha + \beta \cos z)w = 0$$

Volgens (9.12) kunnen we de karakteristieke vergelijking schrijven als:

$$(9.19) \quad \sigma^2 - A\sigma + 1 = 0$$

waarin A nu vanzelfsprekend een functie van α en β is: $A = A(\alpha, \beta)$.

Uit (9.19) volgt:

$$(9.20) \quad \sigma_1 = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - 1}.$$

Voor zodanige waarden van α en β , dat $|A(\alpha, \beta)| > 2$ is, zijn de wortels σ_1 reëel en niet alle oplossingen van (9.18) zijn begrensd; voor zodanige waarden van α en β , dat $|A(\alpha, \beta)| < 2$ is, zijn de wortels σ_1 toegevoegd complex en alle oplossingen van (9.19) zijn begrensd voor alle waarden van z . Dus de kromme, voorgesteld door $|A(\alpha, \beta)| = 2$ scheidt in het (α, β) vlak de gebieden van α en β , waar de beweging correspondeert met (9.18) stabiel dan wel niet-stabiel is. (N.B. de beweging die correspondeert met (9.18) is de beweging waarvoor de storing δx voldoet aan (9.18).

Dus voor het stabiliteitsonderzoek van bijv. de resonantie oplossingen van de vergelijking van Duffing moeten we de kromme $|A(\alpha, \beta)|=2$ bepalen.

Als $|A(\alpha, \beta)|=2$ dan vallen de wortels σ_1 van de karakteristieke vergelijking samen en zij zijn $\sigma=\pm 1$. Voor $\sigma=+1$ heeft (9.18) een oplossing die de periode 2π heeft en voor $\sigma=-1$ heeft (9.18) een oplossing die de periode 4π heeft.

We beschouwen de oplossing $w(z)$ met periode 2π . We kunnen dus deze oplossing schrijven als een even of oneven Fourier reeks

$$(9.21) \quad \begin{cases} w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nz, & \text{of} \\ w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nz. \end{cases}$$

Substitutie van (9.21) in (9.18) geeft

$$\begin{aligned} \alpha a_0 + \frac{1}{2}\beta a_1 &= 0, \\ (\alpha - n^2)a_n + \frac{1}{2}\beta (a_{n-1} + a_{n+1}) &= 0 \quad n=1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en} \quad (\alpha - 1)b_1 + \frac{1}{2}\beta b_2 &= 0, \\ (\alpha - n^2)b_n + \frac{1}{2}\beta (b_{n-1} + b_{n+1}) &= 0 \quad n=2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Aan deze beide homogene oneindige stelsels moet voor een zekere rij $\{a_n\}$ en een zekere rij $\{b_n\}$ voldaan kunnen worden, waarbij noch $\{a_n\}$ noch $\{b_n\}$ nul-rijen zijn.

Omdat a_n en b_n voor n voldoende groot willekeurig klein worden mogen we ons beperken tot eindige stelsels en de corresponderende coëfficiënten determinanten (Determinanten van Hill) moeten nul zijn.

Op dezelfde wijze kunnen we te werk gaan met de oplossing $w(z)$ met periode 4π , corresponderende met $\sigma=-1$. In de Fourierreeksen (9.21) wordt n vervangen door $\frac{n}{2}$.

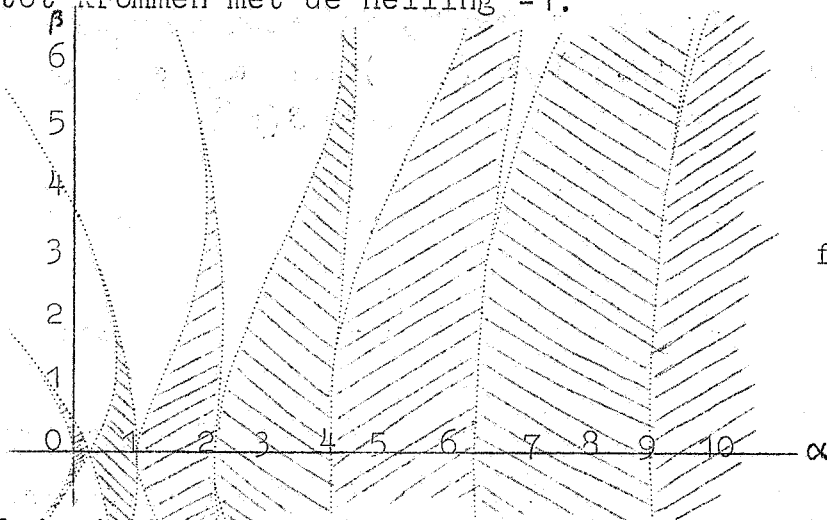
Aldus krijgen we vier determinanten van Hill die nul moeten worden. Zij geven ons de kromme die de stabiele en onstabiele gebieden van de Mathieuvergelijking scheiden.

Het resultaat is gegeven in fig.9.2.

De stabiele gebieden zijn met elkaar verbonden in de punten $\alpha = \frac{n^2}{4}$, $\beta=0$; voor deze waarden van α en β heeft (9.18) de begrensde oplossingen $\cos \frac{n}{2} z$ en $\sin \frac{n}{2} z$ met perioden 2π of 4π .

Is n even dan komen in deze punten twee takken samen, die corresponderen met een oplossing met periode 2π ; is n oneven dan komen in deze punten twee takkensamen met periode 4π .

De kromme $|A(\alpha, \beta)|=2$ is symmetrisch t.o.v. de α -as. Het blijkt, dat voor grote waarden van β de stabiele gebieden zeer nauw worden en naderen tot krommen met de helling -1.



Indien β klein is kunnen we de scheidingskromme van de gebieden van stabiliteit en instabiliteit gemakkelijk als volgt construeren. De periodieke oplossing $w(z)$ met periode 2π of 4π van (9.18), corresponderend met $\sigma = \pm 1$, ontwikkelen we naar β :

$$(9.22) \quad w(z) = w_0(z) + \beta w_1(z) + \beta^2 w_2(z) + \dots$$

De scheidingskromme gaat door de punten $(\frac{n^2}{4}, 0)$ met $n=0, 1, 2, \dots$. Het gedrag van de scheidingskromme in deze punten wordt voor kleine waarden van β voorgesteld door

$$(9.23) \quad \alpha = \alpha_0 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \alpha_2 + \dots$$

De eerste termen van deze reeksen zijn bekend nml.:

$$(9.24) \quad \begin{cases} \alpha_0 = 1/4n^2 & n=0, 1, 2, \dots \\ w_0 = \begin{cases} \cos \frac{n}{2} z \\ \sin \frac{n}{2} z \end{cases} \end{cases}$$

Met behulp van de differentiaalvergelijking (9.18)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha + \beta \cos z) w = 0$$

bepalen we nu de hogere termen.

a) $n=0$.

$$\alpha_0 = 0 \text{ en } w_0 = 1.$$

Substitutie van (9.22) en (9.23) met $\alpha_0 = 0$ en $w_0 = 1$ in (9.18) geeft voor de term $\mathcal{O}(\beta)$:

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} = -\cos z - \alpha_1.$$

Omdat w_1 de periode 2π heeft, is $\alpha_1=0$ en $w_1=\cos z+c$.
Substitutie van (9.22) en (9.23) met $\alpha_0 = \alpha_1=0$ en $w_0=1$ en $w_1=\cos z + C$ geeft nu voor de term $\mathcal{O}(\beta^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_2}{dz^2} + \alpha_2 + (\cos z + C)\cos z &= 0 \\ \text{ofwel } \frac{d^2 w_2}{dz^2} &= -\alpha_2 - \frac{1}{2} - C \cos z - \frac{1}{2} \cos 2z. \end{aligned}$$

Omdat w_2 weer de periode 2π heeft vinden we $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

Dus in de omgeving van $(0,0)$ heeft de scheidingskromme de gedaante
(9.25) $\alpha = -\frac{1}{2}\beta^2 + \dots$

b) $n=1$

$$\therefore \alpha_0 = 1/4$$

$$w_0 = \begin{cases} \cos \frac{1}{2}z \\ \sin \frac{1}{2}z. \end{cases}$$

Substitutie van (9.22) en (9.23) in (9.18) met $\alpha_0=1/4$ en $w_0 = \begin{cases} \cos \frac{1}{2}z \\ \sin \frac{1}{2}z \end{cases}$ geeft voor de coëfficiënt van β :

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} + \alpha_1 \begin{Bmatrix} \cos \frac{1}{2}z \\ \sin \frac{1}{2}z \end{Bmatrix} + 1/4 w_1 + \cos z \begin{Bmatrix} \cos \frac{1}{2}z \\ \sin \frac{1}{2}z \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\text{ofwel } \frac{d^2 w_1}{dz^2} + 1/4 w_1 = \begin{Bmatrix} (-\alpha_1 - \frac{1}{2}) \cos \frac{z}{2} \\ (-\alpha_1 + \frac{1}{2}) \sin \frac{z}{2} \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \cos \frac{3z}{2} \\ \sin \frac{3z}{2} \end{Bmatrix}.$$

w_1 moet periodiek zijn, dus de seculiere term in het rechterlid moet nul worden.

Dus voor $\alpha_0=1/4$, $w_0=\cos \frac{1}{2}z$ krijgen we

$$(9.27) \quad \alpha = 1/4 - \frac{1}{2}\beta$$

en voor $\alpha_0 = 1/4$, $w_0 = \sin \frac{1}{2}z$ krijgen we

$$(9.28) \quad \alpha = 1/4 + \frac{1}{2}\beta.$$

c) $n=2$

$$\therefore \alpha_0 = 1$$

$$w_0 = \begin{cases} \cos z \\ \sin z \end{cases}$$

We vinden op precies dezelfde manier als boven:

$$(9.29) \quad \alpha = 1 + 5/12 \beta^2 \text{ voor } \alpha_0 = 1 \text{ en } w_0 = \cos z,$$

$$(9.30) \quad \alpha = 1 - 1/12 \beta^2 \text{ voor } \alpha_0 = 1 \text{ en } w_0 = \sin z.$$

Het resultaat is gegeven in figuur 9.3 en de overeenstemming met figuur 9.2 is zeer redelijk.

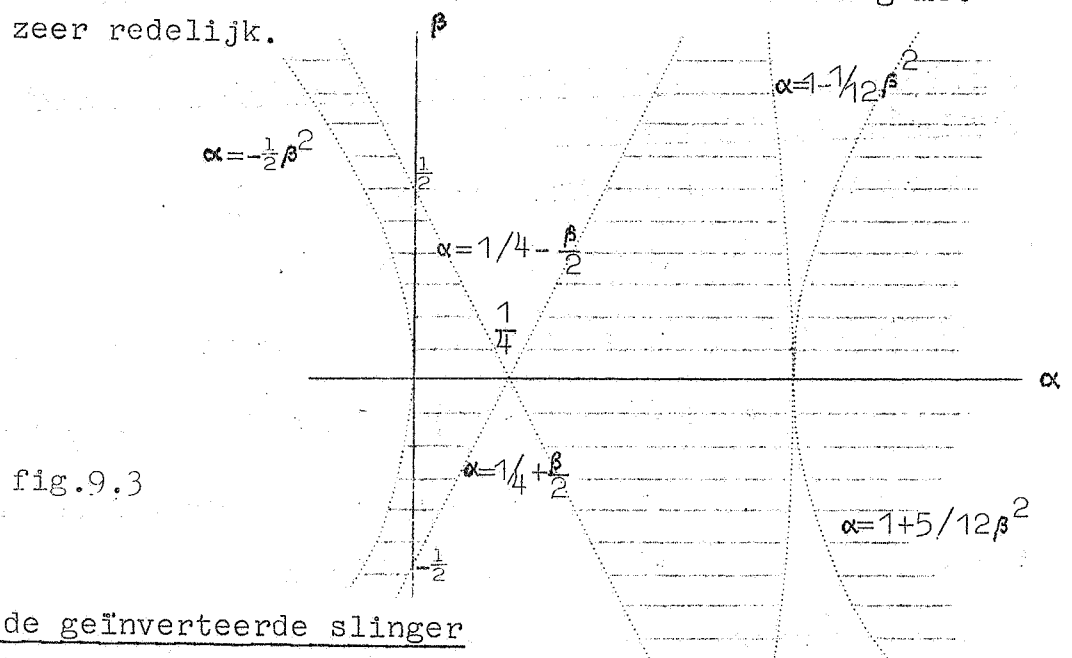


fig.9.3

Toepassing op de geïnverteerde slinger

De vergelijking van de geïnverteerde slinger was volgens (9.7)

$$\ddot{v} + \left\{ -\frac{g}{l} + \frac{1}{l} p(t) \right\} v = 0.$$

Stellen we $\frac{1}{l} p(t) = \omega^2 \beta \cos \omega t$,

$$\frac{g}{l} = \omega^2 \alpha,$$

en

$$\omega t = \tau,$$

dan gaat (9.7) over in:

$$(9.31) \quad \frac{d^2 v}{d\tau^2} + \{ -\alpha + \beta \cos \tau \} v = 0.$$

Uit fig.(9.2) en (9.3) kunnen we bij gegeven negatieve α inderdaad β (dus de amplitude van de opgedrongen kracht) zodanig bepalen, dat alle oplossingen van (9.31) begrensd zijn, zodat de slingerbeweging stabiel is.

Uit de meer exacte figuur (9.2) blijkt, dat de keuze voor deze amplitude niet erg groot is als $\frac{g}{l\omega^2}$ groter dan 1 is.

Hoe hoger de frequentie ω van de uitwendige kracht is, des te meer vrijheid heeft men voor de keuze van de amplitude van deze kracht, opdat de slingerbeweging stabiel is.

Indien de slinger niet geïnverteerd is, dan wordt α positief.

Voor kleine waarden van α zal de slingering bij van nul toenemende waarden van β sneller labiel worden, dan bij grote waarden van α . (Zie fig.9.2).

Dus voor grote waarden van de frequentie ω van de uitwendige kracht, wordt de slingering bij toenemende waarden van de amplitude van deze kracht eerder labiel dan bij kleine waarden van ω .

Toepassing op de stabiliteit van de responsie-oplossingen van de vergelijking van Duffing

De vergelijking van Duffing was volgens (9.1)

$$\ddot{x} + (x + \epsilon x^3) = g \cos \omega t.$$

De differentiaalvergelijking voor de verstoringen was volgens (9.5)

$$\delta \ddot{x} + \left\{ (1 + 3/2 \epsilon a^2) + 3/2 \epsilon a^2 \cos 2\omega t \right\} \delta x = 0.$$

De vergelijking voor de responsiekrommen was volgens (9.3)

$$(9.3) \quad \omega^2 = 1 + 3/4 \epsilon a^2 - \frac{g}{a}.$$

Zonder de algemeenheid te schaden mogen we in het vervolg g positief veronderstellen.

De responsiekrommen voor $\epsilon > 0$ en $\epsilon < 0$ (harde resp. zachte veerkracht) geven we nog eens in fig.9.4

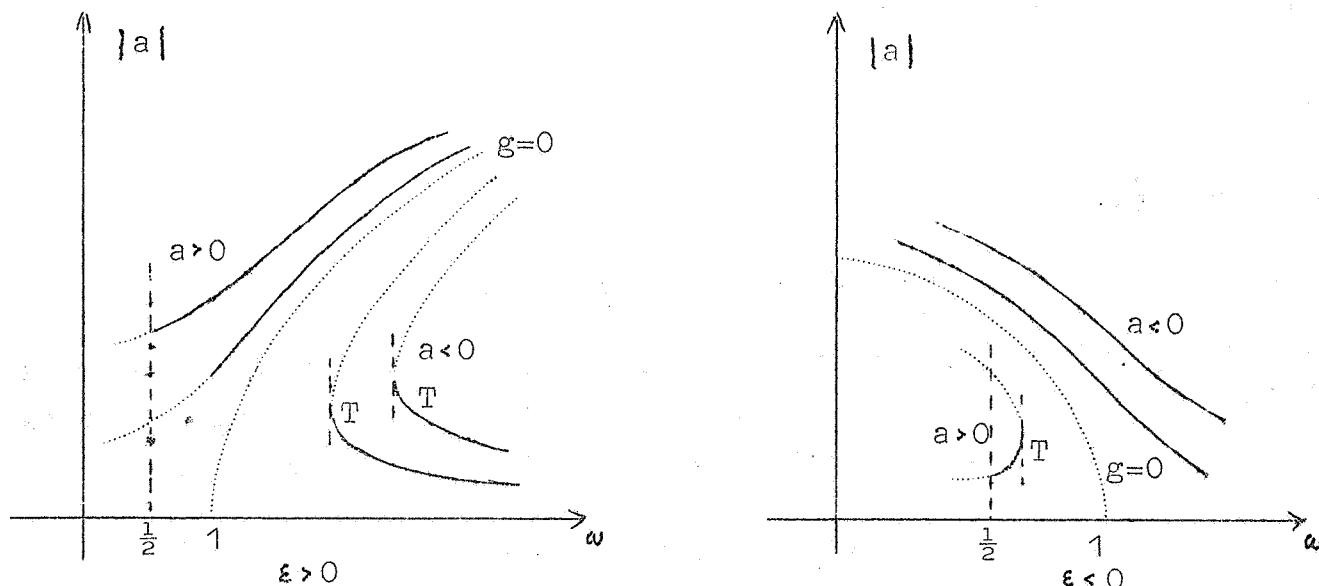


fig.9.4

Links van de curve met $g=0$ zijn de responsiekrommen van de bewegingen, die in phase zijn met de opgedrongen uitwendige kracht; rechts van de curve met $g=0$ die van de bewegingen, welke in phase tegengesteld zijn met de opgedrongen kracht.

Om de stabiliteit van de responsie oplossingen $x=a \cos \omega t$ te onderzoeken maken we de volgende substituties:

$$(9.32) \quad \begin{aligned} z &= 2 \omega t, \\ \alpha &= \frac{1+3/2 \epsilon a^2}{4 \omega^2}, \quad \beta = \frac{3/2 \epsilon a^2}{4 \omega^2}. \end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking voor de storingen gaat nu over in:

$$(9.33) \quad \frac{d^2(\delta x)}{dz^2} + \{\alpha + \beta \cos z\} \delta x = 0,$$

en de responsiekrommen (9.3) worden in het (α, β) vlak voorgesteld door de parametervoorstelling:

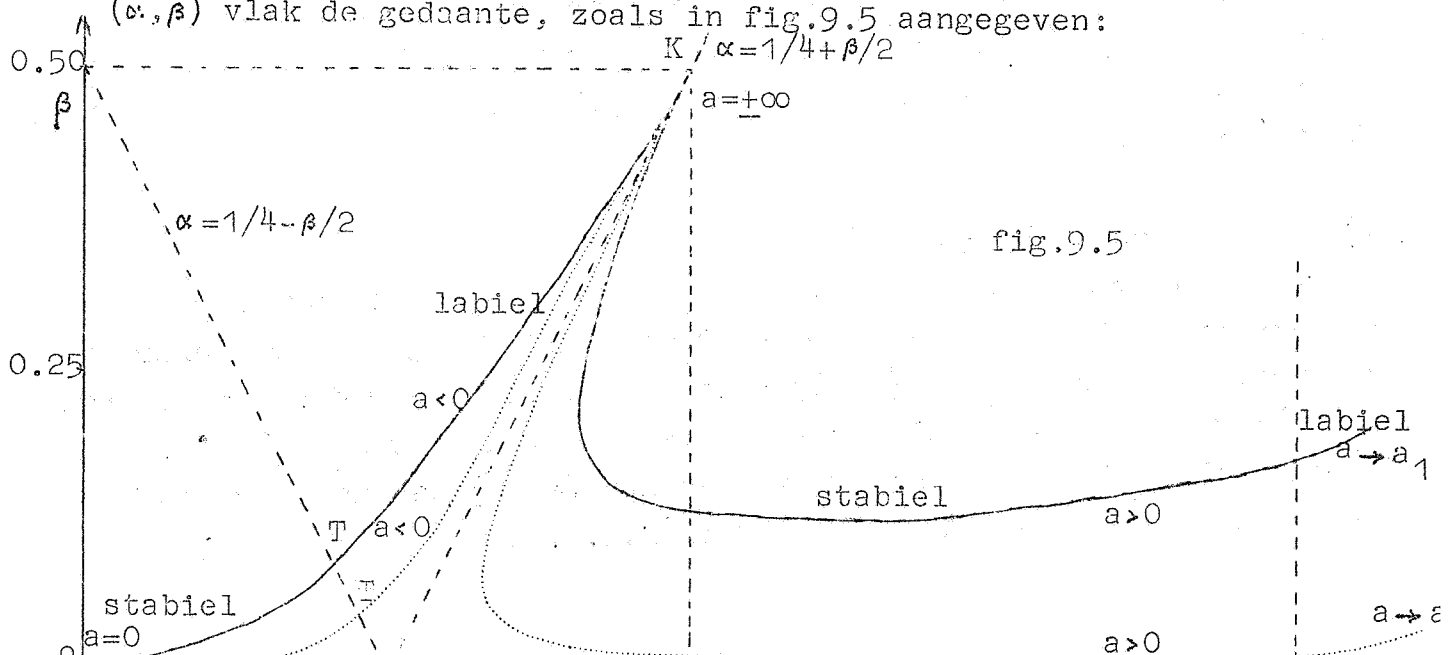
$$(9.34) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1+3/2 \epsilon a^2}{4+3 \epsilon a^2 - \frac{4g}{a}}, \\ \beta = \frac{3/2 \epsilon a^2}{4+3 \epsilon a^2 - \frac{4g}{a}}, \end{cases}$$

met a als parameter en ϵ en g als gegeven constanten.

We zullen nu achtereenvolgens de gevallen van $\epsilon > 0$ en $\epsilon < 0$ beschouwen (harde resp. zachte veerkracht).

a) harde veerkracht ($\epsilon > 0$).

Voor bepaalde keuzen van ϵ en g hebben de responsiekrommen in het (α, β) vlak de gedaante, zoals in fig. 9.5 aangegeven:



De responsiekrommen gaan alle door de oorsprong, welk punt overeenkomt met $a=0$, en zij raken daar aan de α -as.

Verder hebben zij een keerpunt in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, welk punt overeenkomt met $a=\pm\infty$; zij raken daar aan de lijn $\alpha = 1/4 + \frac{\beta}{2}$. De noemers van (9.34) hebben slechts één reëel positief nulpunt $a=a_1$.

Voor $a=a_1$ worden α en β beide oneindig.

Vergelijken we fig.9.5 met fig.9.3, dan zien we dat de takken van de responsiekrommen met $a > 0$ (de responsie is in phase met de opgedrongen uitwendige kracht) corresponderen met stabiele responsiebewegingen $x=a \cos \omega t$, mits a groter is dan de waarde die met $\alpha=1$ correspondeert; d.w.z. $\omega \approx \frac{1}{2}$ (zie vgl. (9.32)).

De takken van de responsiekrommen met $a < 0$ (de responsie is in phase tegengesteld met de opgedrongen uitwendige kracht) corresponderen deels met stabiele en deels met niet stabiele responsiebewegingen $x=a \cos \omega t$. Het deel OT correspondeert met stabiele en het deel TK met niet stabiele responsie. Het punt T is het scheidingspunt. We stellen nu de belangrijke vraag met welk punt in fig.9.4 het punt T van fig.9.5 overeenkomt.

Het punt T ligt op de lijn

$$(9.35) \quad \alpha = 1/4 - \frac{\beta}{2}.$$

Eliminatie van a uit (9.34) en (9.35) levert:

$$(9.36) \quad 3/2 \varepsilon a^3 + g = 0.$$

Uit de responsievergelijking (9.3) volgt, dat voor $3/2 \varepsilon a^3 + g = 0$, $\frac{d\omega}{da}$ gelijk aan nul is.

Dus de punten T van de responsiekrommen van fig.9.4, waar de raaklijn verticaal is corresponderen met de overgang van stabiele naar labiele resonantie oplossingen van de vergelijking van Duffing. De stabiele gedeelten van de responsiekrommen zijn getrokken, de labiele gedeelten zijn gestippeld.

1) zachte veerkracht ($\varepsilon < 0$).

De responsiekrommen in het (α, β) vlak verschillen nu aanmerkelijk van die voor $\varepsilon > 0$; dit is een gevolg van het feit, dat de noemer in de parameteraanpak (9.34) voor $\varepsilon < 0$ voor drie reële waarden van a nul wordt; deze nulpunten geven we aan door a_i met $a_1 > a_2 > a_3$. De gedaante van de responsiekromme in het (α, β) vlak is voor een bepaalde keuze van g en ε geschetst in fig.9.6.

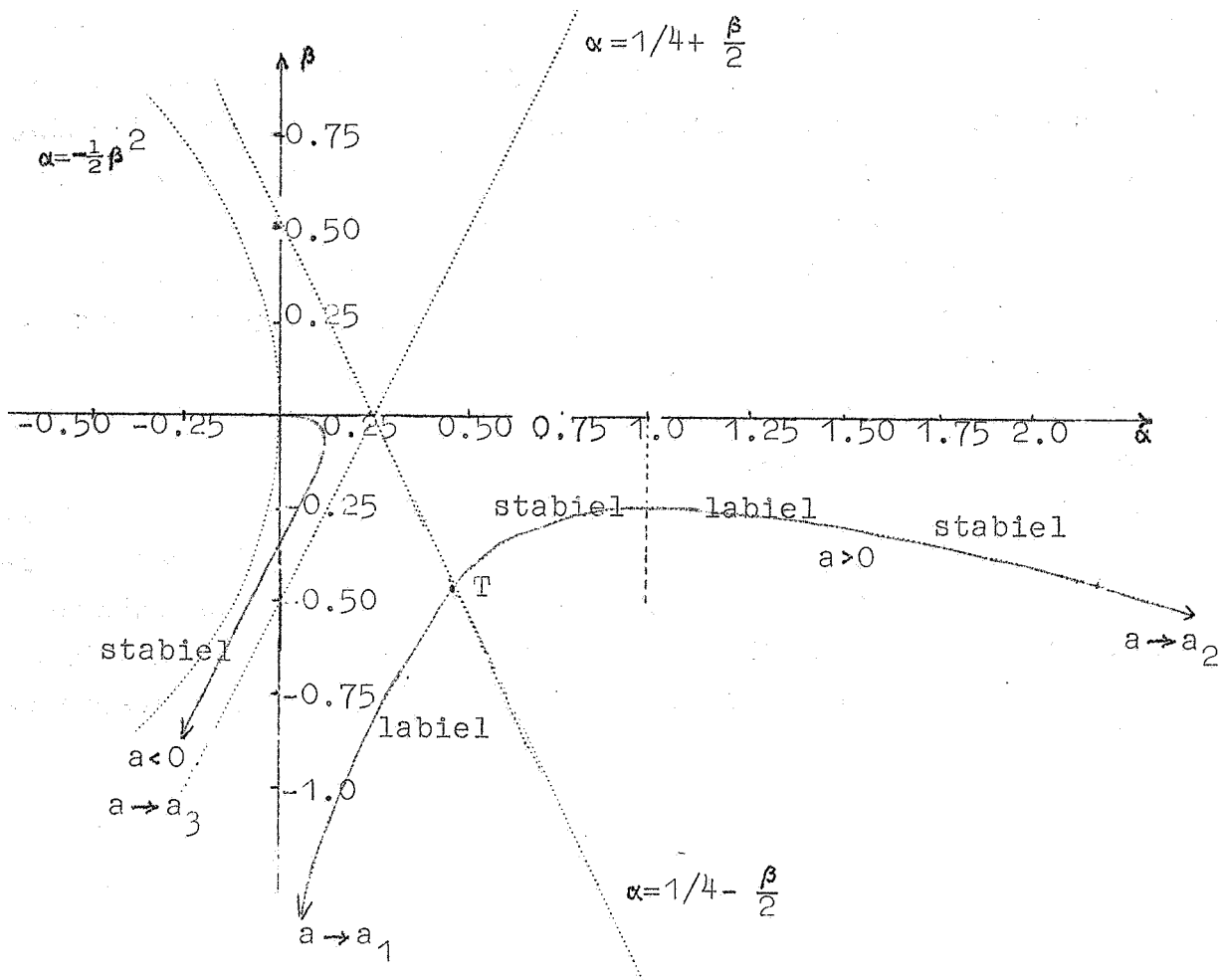


fig.9.6

Vergelijken we weer fig.9.6 met fig.9.3, dan zien we, dat voor $a > 0$ de resonantiekromme gedeeltelijk correspondeert met stabiele en gedeeltelijk met labiele resonantie oplossingen $x = a \cos \omega t$ van de vergelijking van Duffing.

We hebben weer een overgang van labiel naar stabiel voor α ongeveer gelijk aan 1, d.w.z. $\omega \approx \frac{1}{2}$ (zie vgl.9.32).

Bij het punt T krijgen we wederom een overgang van stabiel naar labiel, welk punt in het (a, ω) vlak correspondeert met het punt van de resonantiekromme, waar de raaklijn verticaal is.

Voor $a < 0$ is de resonantie oplossing altijd stabiel.

In figuur 9.4 zijn de stabiele gedeelten weer getrokken en de labiele gedeelten gestippeld.

Indien er geen uitwendige kracht aanwezig is, dan is g gelijk aan nul. Uit (9.34) volgt, dat in dit geval de resonantiekromme in het (α, β) vlak overeenkomt met de scheidingslijn $\alpha = 1/4 + \beta/2$.

Langs de scheidingslijn vallen volgens de theorie van de vergelijking van Mathieu de wortels σ_1 van de karakteristieke vergelijking samen en dus zijn niet alle oplossingen van de differentiaalvergelijking begrensd. Bijgevolg zijn de oplossingen van de vergelijking van Duffing voor $g=0$ niet stabiel in de zin die wij aan onze definitie van stabiliteit gegeven hebben.

Dit zou dus betekenen, dat de vrije trillingen van de vergelijking van Duffing niet stabiel zouden zijn; dit is vanuit fysisch standpunt gezien zeer paradoxaal.

De oplossing van deze paradox is gelegen in onze zeer ruime, eigenlijk te ruime, definitie van stabiliteit.

Met behulp van de minder ruime "kringloop" definitie van stabiliteit ("orbital stability") kan men zorgen, dat de vrije trillingen inderdaad stabiel zijn. Voor het overige blijven stabiele en instabiele oplossingen volgens onze definitie ook stabiel resp. instabiel bij gebruik van de "kringloop" definitie. Hiervoor zij de lezer verwezen naar lit.4.